EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

17e JAARGANG 1941

Nr. 5

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—.
Voor intekenaars op het Nieuw
Tijdschrift v. Wiskunde f 5.—.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6,—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,—) zijn ingetekend, betalen *f* 5,—.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en Wimecos (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,75 op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van Wimecos storten hun contributie van *f* 2,75 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,— per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

In het geval van de kwartcirkel behoort bij een hoger gelegen punt een kleinere subnormaal; bij grotere ω behoort een hoger gelegen punt in de buis.

In het geval van de parabool is de subnormaal standvastig en wel gelijk aan de parameter van de parabool. Is die parameter gelijk aan $\frac{g}{\omega^2}$, dan kan het punt op elke plaats in de buis in relatieve rust blijven; heeft de parameter een andere grootte, dan is er niet een zodanige plaats (over de top spreek ik niet).

In geval van de rechte buis behoort bij een hoger gelegen punt een grotere subnormaal; bij grotere ω behoort een lager gelegen punt in de buis, hetgeen blijkbaar met de verwachting in strijd is.

Aangaande de proef merk ik op, dat hij niets kan bewijzen; de theorie zegt, op welke plaats het punt ten opzichte van de buis in rust kan blijven; de theorie zegt niets omtrent hetgeen gebeurt, als we het punt een andere plaats in de buis geven.

We kunnen hieromtrent wel iets meer te weten komen, en doen goed, het vraagstuk tot dit doel te herleiden tot een evenwichtsvraagstuk door de beweging te beschouwen ten opzichte van een stelsel, dat met de buis om de wentelingsas met hoeksnelheid ω ronddraait. We kunnen van de kracht van Coriolis [1]) afzien, omdat ze door de zijdelingse druk van de buis opgeheven wordt. De resulterende kracht K volgens de raaklijn aan de buis wordt voorgesteld door

$$K = m\omega^2 y \sin\alpha - mg\cos\alpha.$$

Fig. 2.

Om de zin van deze kracht in de omgeving van een evenwichtsstand te bepalen, berekenen we $\frac{dK}{dy}$.

$$\frac{dK}{dy} = m\omega^2 \sin\alpha + m\omega^2 y \cos\alpha \frac{d\alpha}{dy} + mg \sin\alpha \frac{d\alpha}{dy}$$

Of, daar in de evenwichtsstand $\omega^2 y \sin\alpha = g\cos\alpha$ is:

$$\frac{dK}{dy} = m\omega^2 \sin\alpha + \frac{mg}{\sin\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dy}.$$

Of

$$\frac{dK}{dy} = m\omega^2\left(\sin\alpha + \frac{y}{\cos\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dy}\right).$$

[1]) Ze is natuurlijk nul in het geval van relatieve rust.

Ik bepaal nu het teken van $\frac{dK}{dy}$ voor de drie beschouwde gevallen.

Rechte buis. $\frac{d\alpha}{dy} = 0$, dus is $\frac{dK}{dy} = m\omega^2 \sin\alpha > 0$.

Parabolische buis. $y \operatorname{tg} \alpha = p$, waarin p de parameter van de parabool voorstelt.

$$\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{y}. \quad \text{Dus } \frac{dK}{dy} = m\omega^2\left(\sin\alpha - \frac{y}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{y}\right) = 0.$$

Cirkelvormige buis. $y = R\cos\alpha$, dus $\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{1}{R\sin\alpha}$, en

$$\frac{dK}{dy} = m\omega^2\left(\sin\alpha - \frac{y}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{R\sin\alpha}\right) = -m\omega^2\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} < 0.$$

Het resultaat is dus, dat de toestand van het punt in de wentelende buis op de bedoelde plaats er een is van

stabiel	evenwicht in de	cirkelvormige buis.
indifferent	,, ,, ,,	parabolische buis.
labiel	,, ,, ,,	rechte buis.

Leggen we het punt in de cirkelvormige buis iets hoger of lager dan de berekende plaats, dan gaat het kleinere slingeringen om die plaats uitvoeren (op deze eigenschap berust de bruikbaarheid van de centrifugaalregulateur).

Leggen we het punt in de parabolische buis op een willekeurige plaats, dan blijft het in relatieve rust (ondersteld is, dat de hoeksnelheid ω de waarde heeft, die bij de parameter van de parabool behoort).

Leggen we het punt in de rechte buis iets te hoog, dan wordt het punt versneld naar het bovenste deel van de buis gedreven (dit is bij de boven beschreven proef gebeurd). Leggen we het te laag, dan wordt het versneld naar beneden gedreven.

Uit het feit, dat in het laatste geval de evenwichtsstand labiel is, volgt (we verwaarlozen hier steeds de wrijving), dat het verschijnsel aan de proef, op de beschreven wijze genomen, ontsnapt. Toch kunnen we er wel iets van te zien krijgen. Nemen we een rechte buis en sluiten we die aan beide zijden, na hem voor een gedeelte met kogeltjes gevuld te hebben, en draaien we deze met behulp van de centrifugaalmachine om een verticale as door het benedeneinde van de buis, dan zullen we zien, dat bij een voldoend grote ω een

gedeelte van de kogels zich verzamelt in het bovenste deel, de rest in het onderste deel van de buis. Laten we ω langzaam en geleidelijk toenemen, dan gaat langzamerhand een aantal kogeltjes uit het onderste naar het bovenste deel. Bij elke ω geeft het bovenste kogeltje uit het onderste gedeelte de plaats aan van relatieve rust, die bij die ω behoort. [1])

Nemen we dezelfde proef in een buis, die de vorm heeft van een kwarfcirkel (één uiteinde op de wentelingsas), dan zullen we zien, dat de kogeltjes een aaneengesloten geheel vormen, dat zich hoger plaatst bij grotere ω.

Ten slotte een woord over de oorzaak van het onjuiste vermoeden. Deze is zeer eenvoudig en bestaat hierin, dat men uitsluitend denkt aan het streven van de middelpuntvliedende kracht om het punt van de wentelingsas te verwijderen en geen aandacht schenkt aan de zwaartekracht, die (in de beschouwde gevallen) het punt tot de as wil doen naderen.

H. J. E. BETH.

LVI.

Naar aanleiding van de voordracht van den heer Alders merkte ik op, dat het, wanneer men zich — wat bij het m.o. volstrekt noodzakelijk zal zijn — tevreden stelt met een bescheiden mate van exactheid, niet nodig is, de bepaalde integraal te definiëren of te berekenen als limiet van een som van de bekende vorm. Ik wil thans om te beginnen de methode van den heer Alders uit een oogpunt van exactheid beschouwen.

Wanneer men het integraalbegrip exact wil behandelen, dan is het, in verband met de toepassingen, het meest doelmatig, de bepaalde integraal op de door Riemann aangegeven wijze te definiëren. De methode van den heer Alders leidt tot vereenvoudiging en

---

[1]) De proef is gemakkelijk te nemen; men neemt een buis van ca 50 cm en vult die voor ongeveer de helft met erwten; neem een hellingshoek van ca 45°. Door de vrij snelle draaiing worden de erwten minder goed zichtbaar. Meer aan te bevelen is daarom de proef, die collega Plas voor mij demonstreerde; hij heeft aan een rondwentelende hellende stok een aantal aluminiumstrookjes door draadjes bevestigd. Het strookje, dat zich op de boven gezochte plaats van relatieve rust bevindt, plaatst zich loodrecht op de stok; bij een grotere ω behoort een lager gehangen strookje.

bekorting door de beperking tot monotone functies en door de verdeling van het integratie-interval uitsluitend in onderling gelijke delen. Tegen de laatste specialisatie is het volgende bezwaar aan te voeren.

Waarschijnlijk de meest fundamentele betrekking uit de theorie der bepaalde integralen luidt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^m f(x)\,dx + \int_m^b f(x)\,dx. \qquad (a < m < b).$$

Op deze betrekking berust de continuiteit van de bepaalde integraal als functie van boven- en benedengrens en ook de afleiding, die de heer Alders geeft van de betrekking:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x).$$

De afleiding van de eerste betrekking levert bijzondere moeilijkheden, wanneer men de methode van den heer Alders volgt en rekening houdt met de mogelijkheid, dat $\frac{m-a}{b-a}$ irrationeel is. Voor het onderwijs zijn deze kwesties natuurlijk zonder belang.

De bedoelde betrekking is namelijk onmiddellijk duidelijk, wanneer men het integraalbegrip rechtstreeks doet rusten op het aan de aanschouwing ontleende begrip oppervlakte; ook het bewijs van de tweede der genoemde betrekkingen levert dan geen enkele moeilijkheid op.

De toepassingen van de integraalrekening, die bij het m.o. ter

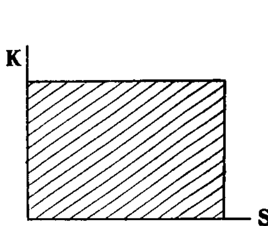


Fig. 1.

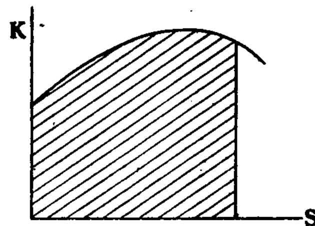


Fig. 2.

sprake komen, behoeven ook geen aanleiding te geven, de integraal te beschouwen als limiet van een som van de bekende vorm.

Als voorbeeld neem ik de *arbeid*. De arbeid van een constante kracht, die werkt in de richting van een rechtlijnige beweging, is bij definitie $K \times s$; deze uitdrukking is gemakkelijk meetkundig te interpreteren (fig. 1). Deze meetkundige interpretatie wijst de richting, waarin we de definitie van de arbeid moeten zoeken, wanneer de kracht niet langer constant, maar veranderlijk, is (fig. 2); we beschouwen K als functie van s en bekijken het geärceerde oppervlak. De leerlingen herkennen

$$\int K\,ds.$$

De generalisaties, die nodig zijn om te komen tot de definitie van de arbeid verricht door een kracht van willekeurige richting bij kromlijnige beweging, liggen voor de hand.

Om in bijzondere gevallen de arbeid te berekenen, behoeft men de bekende limietbepaling ook niet uit te voeren. Men merkt op, dat van de voorlopig onbekende functie van s de afgeleide bekend is; deze is gelijk aan de projectie van de kracht op de richting van de weg. [1])

Men heeft als bezwaar gevoeld, dat bij een behandeling als de hier voorgestelde de notatie $\int f(x)dx$ niet bevredigend verklaard kan worden. Voor zover dit bezwaar zich in de practijk werkelijk mocht doen gelden, zou het te ondervangen zijn, door $\int f(x)$ te schrijven; transformatie van de onafhankelijk veranderlijke komt immers niet ter sprake. De arbeid wordt dan $\int K(S)$.

Samenvattend: *bij het peil van exactheid, waarmee men bij het m.o. genoegen zal dienen te nemen, is het niet nodig en niet gewenst, de bepaalde integraal te beschouwen als limiet van een som;* noch bij de definitie van de bepaalde integraal, noch bij de afleiding van de eigenschappen ervan, noch bij het berekenen van bepaalde en onbepaalde integralen, noch bij het invoeren van meetkundige of natuurkundige grootheden als integraal van meer eenvoudige, noch voor de berekening van zulke grootheden.

E. W. BETH.

---

[1]) Een dergelijke behandeling komt reeds voor bij N e w t o n; zie Hist. Bibl. deel V blz. 16.

LVII.

Naar aanleiding van Korrel LIII Jg. 17 No. 3 blz. 137.

DE BEREKENING VAN LIJNSTUKKEN IN EEN DRIEHOEK.

Terecht vermoedde de Heer Beth, dat de door hem aangegeven gedragslijn niet nieuw is. Ik maak bij mijn onderwijs in de Meetkunde reeds jaren van bedoelde stelling gebruik, reeds lang voor de Heer Wijdenes er in zijn Meetkundeboeken melding van maakte.

Na eerst van de stelling gebruik gemaakt te hebben bij de berekening van een hoogtelijn, een zwaartelijn en een deellijn volgt de berekening van de lengte van het lijnstuk, dat een hoekpunt met een willekeurig punt van de overstaande zijde verbindt, zoodat de kennis van de stelling van Stewart hiervoor niet vereischt wordt. Men kan nu bijv. vrij eenvoudig oplossen het vraagstuk: van vierhoek ABCD is gegeven: AB, BC, CD, DA en AC. Te berekenen BD. Men kan BD berekenen door eerst de „stelling" toe te passen op △ ABC en △ ACD, daarna de hoogtelijnen uit B resp. D in deze driehoeken te berekenen om dan tenslotte met behulp van de stelling van Pythagoras BD te berekenen.

Ik leid vervolgens een stelling af die in onze meetkundeboeken gewoonlijk voorkomt als vraagstuk, nl.

Verbindt men de top van een gelijkbenige driehoek met een willekeurig punt van de basis, dan is het kwadraat van de lengte van dit verbindingslijnstuk gelijk aan het kwadraat van de lengte van een been, verminderd of vermeerderd met het product van de lengten van de stukken, waarin de basis verdeeld is.

Het bewijs is als volgt:

In △ ACD: $(\frac{1}{2}c)^2 - s^2 = a^2 - d^2$

$d^2 = a^2 - (\frac{1}{2}c + s)(\frac{1}{2}c - s)$

$d^2 = a^2 - pq$

Ligt D op het verlengde van AB, dan vindt men op soortgelijke wijze

$d^2 = a^2 + pq.$

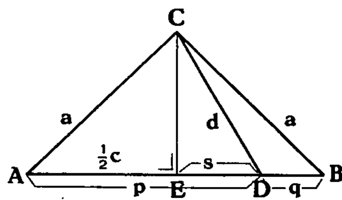


Fig. 1.

Deze stelling kan bij constructies dikwijls mooi toegepast worden, bijv. te construeren $x = a\sqrt{6}$ als a een gegeven lijnstuk is

$$x^2 = 6a^2 = 9a^2 - 3a^2 = (3a)^2 - 3a \times a.$$

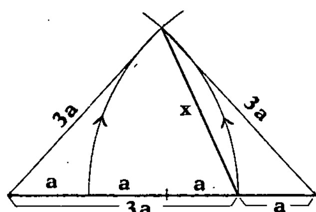


Fig. 2.

Voor de constructie zie nevenstaande figuur. x is het lijnstuk dat in een gelijkbenige driehoek met opstaande zijden $3a$ en basis $4a$ de top verbindt met het punt dat de basis verdeelt in de stukken $3a$ en a.

Te construeren: $x = \sqrt{(p^2 + q^2 - r^2)}$ als p, q en r gegeven lijnstukken zijn.

$x^2 = p^2 + (q - r)\ (q + r)$. Ook nu is x gemakkelijk met behulp van een gelijkbenige driehoek te construeren.

De constructie is ook uit te voeren met behulp van de „stelling" vermeld door den Heer B. nl. $x^2 - p^2 = q^2 - r^2$. q en r zijn de stukken waarin de hoogtelijn de basis verdeelt, p is de opstaande zijde grenzende aan het stuk r en x is dan de andere opstaande zijde.

De projectiestelling kan ook gemakkelijk met behulp van de „stelling" afgeleid worden.

In $\triangle$ ABC:

$$a^2 - b^2 = a_c^2 - b_c^2$$
$$a^2 = b^2 + (a_c + b_c)\ (a_c - b_c)$$
$$a^2 = b^2 + c\ (c - 2b_c)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb_c$$

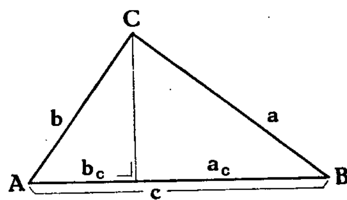


Fig. 3.

In 't geval dat $\angle$A stomp is, leidt men op soortgelijke wijze af: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cb_c$.

Nu in de 2de klasse toepassing van de Goniometrie bij de Meetkunde voorgeschreven is, leid ik uit de projectiestelling onmiddellijk de cosinusregel af, om die dan verder steeds in de plaats van de projectiestelling te gebruiken. We hebben dan niet met 2 gevallen te maken en de leerlingen onthouden de cosinusregel veel gemakkelijker. De afleiding van de stelling van Stewart door twee maal de cosinusregel toe te passen geschiedt dan zonder het trekken van een hulplijn.

In de 3de klasse kan de bekende stelling over de stukken door een cirkel afgesneden van een snijlijn door een gegeven punt P afgeleid worden met behulp van de stelling over een lijnstuk uit de top van een gelijkbenige driehoek naar een punt van de basis getrokken. Veronderstel P ligt binnen de cirkel. Men vindt dan:

$d^2 = R^2 - p_1q_1$ of $p_1q_1 = R^2 - d^2$
$d^2 = R^2 - p_2q_2$ of $p_2q_2 = R^2 - d^2$
enz.

zodat $p_1q_1 = p_2q_2 = \ldots\ldots$

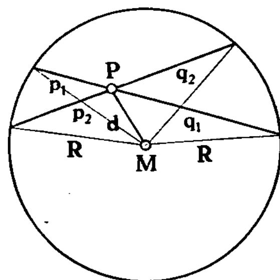


Fig. 4.

Men heeft nu een ongezochte gelegenheid om te spreken over de macht $d^2 - R^2$ van het punt P t.o. van cirkel M. Met behulp van de „stelling” kan men ook gemakkelijk afleiden de meetkundige plaats van de punten P zó t.o. van 2 gegeven punten A en B gelegen, dat $PA^2 - PB^2 = q^2$ (q is een gegeven lijnstuk) en daarna volgt dan de machtlijn van 2 gegeven cirkels.

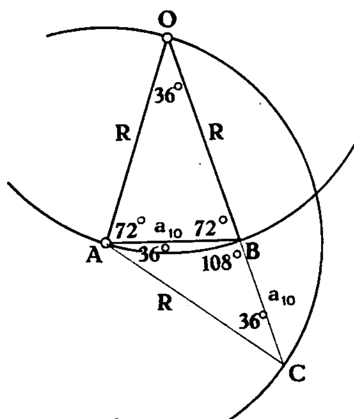


Fig. 5.

Bij de regelmatige veelhoeken kan de stelling over een lijnstuk uit de top van een gelijkbenige driehoek naar een punt van de basis dienst doen bij de berekening van a_{10}.

In gelijkbenige $\triangle$ AOC:

$$a_{10}^2 = R^2 - R \times a_{10}$$

waaruit dan volgt $a_{10} = \frac{1}{2}$ R $(-1 + \sqrt{5})$.

Uit de figuur blijkt tevens, dat de koorde in een cirkel met straal R op een middelpuntshoek van 108° $= a_{10} + R = \frac{1}{2} R (1 + \sqrt{5})$.

J. A. WERTENBROEK.

Naar aanleiding van Korrel LIII vestig ik er de aandacht op, dat een dergelijke wijze van behandelen reeds werd aanbevolen in het voorbericht van den eersten druk van het Leerboek der Algebra (H.B.S.-uitgave), tweede deel van Dr. W. F. de Groot en Dr. C. de Jong.

A. A. LAGAAY.

PROSPECTUS

DR. P. MOLENBROEK

LEERBOEK

DER

STEREOMETRIE



368 blz. — 239 fig.

NEGENDE DRUK

Geb. *f* 7.25*

P. NOORDHOFF N.V. = 1941 = GRONINGEN—BATAVIA

OOK VERKRIJGBAAR DOOR DE BOEKHANDEL

VOORBERICHT.

De achtste druk van dit leerboek voldeed vrijwel aan alle eisen, die men er met het oog op de examens Wiskunde L.O. en KI aan kon stellen; ook gaf deze druk genoeg voor hen, die wat meer van het vak wilden weten, dan er in een schoolboek staat. Dit is de reden, dat er geen ingrijpende wijzigingen behoefden te worden aangebracht om een negende druk te maken, die aan alle behoeften voldoet.

Toch zal men bij vergelijking van deze druk met de vorige opmerken, dat vele, doch meestal kleine, veranderingen zijn aangebracht, die naar we vertrouwen, de bruikbaarheid van het boek ten goede zullen komen. Elke definitie, elke stelling, elk bewijs is opnieuw grondig overwogen en waar onvoldoende scherpte of duidelijkheid werd opgemerkt, is de omschrijving of het betoog strenger, helderder en zo mogelijk eenvoudiger ingekleed.

Aan enkele onderwerpen, die men in de vorige druk vergeefs zocht, doch die wel op een korte bespreking aanspraak mochten maken, is in de nieuwe druk aandacht besteed. Daarentegen zijn een aantal minder belangrijke gedeelten weggelaten of bekort. Zo is, om een greep te doen uit de aanvullingen, in § 14 iets gezegd over de projectie van een hoek, zijn in § 27 een paar belangrijke stellingen ingelast over vlakken, die gelijke hoeken maken met twee rechten of twee vlakken. Er wordt in § 30 een eenvoudige constructie gegeven voor een grote cirkel op een stoffelijke bol, terwijl in § 50 en § 54 het bepalen van de snijpunten van een rechte met een in tekening gegeven prisma of pyramide behandeld is. Verder komen in § 38 de oneindig verre elementen en in § 56 spiegeling, verplaatsing en het algemene begrip gelijk- en gelijkvormigheid ter sprake; in § 80 is de mogelijkheid van het toekennen van maatgetallen aan veelvlakkige lichamen aangetoond; deze redenering is alleen bestemd voor belangstellenden en moge o.a. hen tevreden stellen, die uit VAN DER WAERDEN De logische grondslagen der Euklidische Meetkunde of uit MOLENBROEK Vlakke Meetkunde (8e druk) het overeenkomstige bewijs voor vlakstukken hebben bestudeerd, doch het minder eenvoudige betoog voor veelvlakkige lichamen niet hebben gevonden. In § 130 is een stelling toegevoegd over de kortste verbinding van twee punten op een bol; de voorbereiding van het raakprobleem van APOLLONIUS in § 147 en 148 werd verbeterd door onderscheid te maken tussen isogonaal- en supplementairbollen. In § 61 is een eenvoudig, nieuw bewijs gegeven van de stelling van EULER voor convexe veelvlakken, uitgedacht door HARLAAR en door mij van een inleidend voorbeeld voorzien.

De derde manier ter bepaling van de inhoud van een pyramide vereiste de sommering van een reeks van de tweede orde; deze is geschrapt en vervangen door behandeling met een meetkundige reeks. Sterk bekort is de bespreking van het vijfde geval van congruentie van boldriehoeken, zie

blz. 83; § 64 over ruitenzesvlak en -twaalfvlak is tot op de helft of minder teruggebracht. Ook hoofdstuk XVII over bijzondere viervlakken is bekort. Verder zijn hier en daar enkele vraagstukken ingevoegd, terwijl het lange hoofdstuk over de pyramide in tweeën is gesplitst.

Nog zijn enkele kleinigheden gewijzigd, niet van voldoende belang om ze afzonderlijk te noemen.

De moeilijke delen van de theorie zijn met kleine letter gedrukt; dit betekent, dat ze bij eerste lezing overgeslagen kunnen worden. Candidaten voor L.O. behoeven er geen nota van te nemen; ook kunnen ze het tweede deel van hoofdstuk XII en het gehele hoofdstuk XXV over inversie in de ruimte ter zijde laten, evenals de vraagstukken van § 139 en § 140.

Gaarne betuig ik hier mijn dank aan mijn medewerkers Harlaar en Herreilers voor al het werk, dat zij verricht hebben bij de bewerking van dit boek. Wij alle drie houden ons aanbevolen voor op- en aanmerkingen, die dit werk ten goede kunnen komen, zowel van opleiders, van studerenden als van andere gebruikers.

Een nieuw boekje met antwoorden en uitwerkingen verschijnt vrijwel tegelijk met deze herdruk.

Amsterdam Zuid. P. Wijdenes.

Maart 1941.

In de volgende werken vindt men belangrijke onderwerpen uit de Stereometrie uitvoerig behandeld of aanvullende vraagstukken ter verdere oefening:

Landré, Stereometrische Hoofdstukken.
Cikot, Complement der Stereometrie.
Versluys, Handboek der Stereometrie.
Schuh, Grepen uit de moderne Meetkunde.
Schuh, Leerboek der Nieuwere Meetknnde van het platte vlak en van de ruimte.
De Vries, Beknopt leerboek der Projectieve Meetkunde.
Verkaart, Gids voor Wiskunde L.O.
Verkaart, Wijdenes en Schuh, Mondelinge examens Wiskunde.

Met goedkeuring van Dr. Molenbroek wordt het herzieningsrecht op dit werk door ondergetekende uitgeoefend buiten enige verantwoordelijkheid van Dr. Molenbroek voor inhoud en vorm.

P. W.

Proefpagina

Congruentie is eveneens reflexief, commutatief en transitief, doch symmetrie is wel commutatief, maar niet reflexief of transitief.

De verplaatsing, die neerkomt op 0 spiegelingen, dus waarbij elk punt in zich zelf overgaat, heet de **identieke verplaatsing.** Een verplaatsing, die het product is van 2 spiegelingen, noemen we een **verschuiving** of **translatie,** als de vlakken van spiegeling evenwijdig zijn, en een **draaiing** of **rotatie,** als de vlakken van spiegeling elkaar snijden. Gaat bij een verschuiving A in A′ over, dan gaat het willekeurige punt P over in het punt P′, waarvoor $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PP'}$ is en we noemen de vector [1]) $\overrightarrow{AA'}$ de **vector** van de verschuiving. Deze is blijkbaar het dubbele van de vector voorgesteld door een gericht lijnstuk loodrecht op de vlakken van spiegeling, waarvan begin- en eindpunt opv. liggen in het eerste en het tweede vlak van spiegeling. Bij een draaiing gaan de punten van de **as,** d.i. de snijlijn van de vlakken van spiegeling, in zich zelf over. Een punt P, dat niet op de as ligt, gaat over in een punt P′, dat dezelfde projectie Q op de as heeft als P, terwijl PQ = P′Q is en de gerichte hoek [2]) Q(PP′) voor elke ligging van P dezelfde grootte heeft. Deze hoek heet de **hoek** van de draaiing en is het dubbele van een gerichte hoek in een vlak loodrecht op de as, waarvan het eerste en het tweede been opv. liggen in het eerste en het tweede vlak van spiegeling. Een draaiing van 180° om de as l heet ook **spiegeling** in (of t.o. van) l. Het **spiegelpunt** van P t.o. van l is dus het punt P′, waarvoor de projectie van P op l het midden is van $\overline{PP'}$ (als P op l ligt, vallen P en P′ samen). Gaat een figuur door spiegeling t.o. van een rechte in zich zelf over, dan noemen we deze rechte een **symmetrieas** of **as van symmetrie** van de figuur.

Een verplaatsing, die neerkomt op 4 spiegelingen (die niet tot 2 teruggebracht kunnen worden), heet een **schroeving.** Bewezen kan worden, (zie § 60 nr. 8*b*), dat deze het product is van een draaiing om een as l, gevolgd door een verschuiving volgens een op l liggende vector. Draaiing en verschuiving zijn verwisselbaar.

Een verplaatsing gevolgd door een spiegeling of omgekeerd (waardoor dus een ruimtefiguur in elke hiermee symmetrische kan worden omgezet), komt, zoals we weten, neer op 1 of 3 spiegelingen. In het laatste geval kunnen we, naar bewezen kan worden (zie § 60 nr. 9*b*), hetzelfde bereiken door een spiegeling, gevolgd door een verschuiving volgens een in het vlak van spiegeling liggende vector (we spreken dan van een **verschoven spiegeling**), of gevolgd door een draaiing om een as loodrecht op het vlak van spiegeling (we spreken dan van een **gedraaide spiegeling**). Spiegeling en verschuiving of draaiing kunnen verwisseld worden.

[1]) Zie Dr. P. Molenbroek, Leerboek der Vlakke Meetkunde, 8e druk blz. 45.

[2]) Idem, blz. 24.

in B'), gaat de boldriehoek over in een boltweehoek; de ene halve grote cirkel is ABA', de andere zal BC b.v. in D snijden. Noem $\angle$ DAB = $\angle$ DA'B = x, dan is de oppervlakte van de boltweehoek:

$$\frac{x}{360^\circ} \times 4\pi R^2 = \frac{A + B + C - 180^\circ}{720^\circ} \times 4\pi R^2,$$

dus $x = \frac{1}{2}(A + B + C - 180^\circ)$. In de topdriehoek CA'B' is $\angle$ OA'C = $\frac{1}{2}(-A + B + C)$; voeg hierbij $\angle$ CA'B = A en trek van de som $\angle$ DA'B = $\frac{1}{2}(A + B + C - 180^\circ)$ af, dan komt er $\angle$ OA'D = 90°; *de grote cirkel A'DA staat dus in A' loodrecht op de grote cirkel door A' en O.* Zonder berekening ziet men het ook als volgt in: als C langs B'CA' loopt, zal bij het samenvallen van C met A' de boog A'CA overgegaan zijn in een boog van de grote cirkel, die in A' raakt aan de cirkel A'CB' en dus staat OA' loodrecht op A'DA.

Stelling 142 wordt gebruikt bij de uitvoering van de volgende werkstukken.

Werkstuk XX. Een boldriehoek door een grote cirkel door een der hoekpunten te verdelen in twee delen met gelijke oppervlakte.

Oplossing. Als men de boldriehoek ABC in de boltweehoek BAA'D met dezelfde oppervlakte heeft veranderd en men neemt dan A'E = AB, dan is opp. ABE = $\frac{1}{2}$ opp. tweehoek BAA'D. Als de cirkel van LEXELL van $\triangle$ ABE, waarvan AB standvastig is, de boog AC in F snijdt, dan is opp. ABF = $\frac{1}{2}$ opp. ABC.

Men kan ook eerst een gelijkbenige boldriehoek AKB (AK = BK) bepalen, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van $\triangle$ ABC (ook weer met behulp van de cirkel van LEXELL) en daarna het midden N van AB bepalen. Vervolgens kan men dan op KB het punt L zo bepalen, dat opp. ABL = opp. BKN is en ten slotte het punt F op AC zo, dat opp. ABF = opp. ABL = $\frac{1}{2}$ opp. ABC is. Hierbij wordt st. 142 in totaal drie keer toegepast.

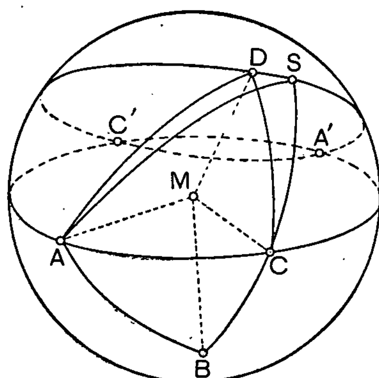


Fig. 201.
Opp. ABCD = opp. ABS.

Werkstuk XXI. Een boldriehoek te construeren, die even grote oppervlakte heeft als een gegeven bolvierhoek (zie fig. 201).

Oplossing. Zij ABCD die bolvierhoek; verdeelt men deze nu door de diagonaal AC in twee boldriehoeken, dan kan men volgens st. 142 de meetkundige plaats bepalen van de

Voor het geval, dat de krommen elkaar in P raken, dus dat in P hun hoek 0° is, volgt hieruit nog:

Als twee krommen elkaar in een punt P raken, zullen de inverse krommen elkaar in het inverse punt P′ van P raken.

Op dergelijke wijze als stelling 162 bewijzen we:

Stelling 163. De hoek van twee oppervlakken in een gemeenschappelijk punt P is gelijk aan die van de inverse oppervlakken in het inverse punt P′ van P.

Bewijs. Een raaklijn l in P aan het oppervlak F is de limietfiguur van een rechte door P en een punt Q, dat langs F tot P nadert. Daarbij nadert het inverse punt Q′ van Q langs het inverse oppervlak F' tot P′ en heeft de rechte P′Q′, naar ons zoëven gebleken is, tot limietfiguur de rechte l' door P′, die symmetrisch ligt met l t.o. van het asvlak van $\overline{PP'}$. Deze rechte l' is een raaklijn in P′ aan F'. Met elke raaklijn in P aan F correspondeert dus een raaklijn in P′ aan F', die de gespiegelde is van de eerstbedoelde in het asvlak van $\overline{PP'}$. Evenzo is de gespiegelde in dit asvlak van een raaklijn in P′ aan F' een raaklijn in P aan F. Hieruit volgt, dat het vlak door P′, dat symmetrisch ligt met het raakvlak in P aan F, in P′ aan F' raakt.

We beschouwen nu twee oppervlakken F_1 en F_2, die het punt P gemeen hebben. U_1 en U_2 zijn de raakvlakken in P aan die oppervlakken en U_1' en U_2' zijn de raakvlakken in het inverse punt P′ van P aan de inverse oppervlakken F_1' en F_2'. Volgens het voorgaande zullen nu U_1 en U_1', zowel als U_2 en U_2', symmetrisch liggen t.o. van het asvlak van PP′, zodat $\angle\ (U_1, U_2) = \angle\ (U_1', U_2')$ is, wat te bewijzen was.

Als de oppervlakken elkaar in P raken, m.a.w. als hun hoek in P 0° is, volgt hieruit in het bijzonder nog:

Als twee oppervlakken elkaar in een punt P raken, zullen de inverse oppervlakken elkaar in het inverse punt P′ van P raken.

Uit de hulpeigenschap voor st. 162 en het begin van het bewijs van st. 163 volgt nu gemakkelijk:

Stelling 164. De hoek van een kromme en een oppervlak in een gemeenschappelijk punt P is gelijk aan die van de inverse kromme en het inverse oppervlak in het inverse punt P′ van P.

Hieruit volgt dan weer in het bijzonder:

Als een kromme een oppervlak in een punt P raakt, zal de inverse kromme het inverse oppervlak in het inverse punt P′ van P raken.

Behoort de lijn k tot de rand van een oppervlak F en is P een punt van k, dan noemen we het halve vlak H, begrensd door de raaklijn l in P aan k, het **halve raakvlak** in P aan F, als minstens één halve rechte uit P

I N H O U D.

OVER DE ONMEETBAARHEID VAN π.

DOOR

J. POPKEN.

§ 1. *Iets uit de geschiedenis van dit probleem.*

Door de eeuwen heen heeft men getracht het getal π door een meetbaar getal voor te stellen. Zoo schreven de Babyloniërs aan π de waarde 3 toe; ja, deze waarde komt zelfs in de Bijbel voor. In 2 Kronieken 4 : 2 en 1 Koningen 7 : 23 wordt met betrekking tot de tempelbouw door Salomo vermeld: „Voorts maakte hij de gegoten zee; van tien ellen was zij van haren éénen rand tot haren anderen rand, rondom rond, en van vijf ellen in hare hoogte, en een meetsnoer van dertig ellen omving ze rondom". Tot deze vrij gebrekkige rectificatie van de cirkel werden de Babyloniërs waarschijnlijk gevoerd, doordat hun bekend was, dat de straal juist zes maal als koorde op de cirkelomtrek is af te passen [1]). De vraag of de Babyloniërs in 't geheel geen betere approximatie voor π gekend hebben, laten we hier intusschen rusten [2]).

Daarentegen weten we van de Egyptenaren, dat zij een veel betere waarde voor π hadden. We putten onze kennis over de wiskunde der Egyptenaren hoofdzakelijk uit twee papyri, die respectievelijk in Londen en Moscou bewaard worden. Die in Londen is de grootste en de meest bekende; deze wordt naar de oorspronkelijke bezitter „het papyrus Rhind" genoemd. Ook spreekt men vaak van „het rekenboek van Ahmes", omdat de schrijver Ahmes hierin een aantal vraagstukken met hun oplossingen verzamelde, die teruggaan tot de tijd van het Middelste Rijk. „Voorschrift om tot kennis te geraken van alle donkere dingen . . . van alle geheimen, die in de voorwerpen schuilen", zoo vangt het veelbelovend aan. In dit papyrus nu wordt

---

[1]) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, Leipzig 1880, pag. 91.

[2]) O. Neugebauer, Vorlesungen über Geschichte der antiken Mathematischen Wissenschaften I, Berlin 1934, pag. 170.

o.a. het vraagstuk besproken om bij een gegeven cirkel een vierkant met even groot oppervlak te vinden. Het gaat dus om de kwadratuur van de cirkel.

Het voorschrift luidt daar, dat men een vierkant moet nemen, welks zijde $\frac{8}{9}$ van de middellijn van de cirkel is. Dit geeft dus de oppervlakteformule

$$O = \left(\frac{16}{9} R\right)^2,$$

als R de straal van de cirkel is, en levert voor π de waarde $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604 \ldots$ Vergelijkt men daarmee $\pi = 3{,}1415 \ldots$, dan ziet men, dat de uitkomst verrassend goed is. Ongetwijfeld zijn de Egyptenaren langs empirische weg tot dit resultaat gekomen.

Eerst de Grieken stelden de opgave van de kwadratuur van de cirkel, zooals wij die kennen: bij een gegeven cirkel met passer en lineaal een even groot vierkant te construeeren. Deze opgave leidde tot een groot aantal pogingen — meest van dilettanten — om π door een rationaal getal voor te stellen. Immers, gelukte het om π als een meetbaar getal te schrijven, dan kon men bij een gegeven cirkel met straal R heel eenvoudig een vierkant met zijde $R\sqrt{\pi}$ construeeren en het probleem van de kwadratuur van de cirkel was opgelost. In het bijzonder trachtte men π te schrijven als een verhouding van twee kwadraatgetallen, immers dan werd de constructie wel heel gemakkelijk. Ongelooflijk veel tijd en moeite is op dit probleem verspild. Heel vaak zocht men de oplossing in de hierboven aangegeven richting, hoewel de Pythagoreeërs reeds gevonden hadden, dat eenvoudige grootheden als $\sqrt{2}$ zeer goed onmeetbaar konden zijn.

Er is een tijd geweest, dat het aantal „kwadrateurs" enorm groot was. Bij velen onder hen bestond zelfs het mystieke geloof, dat een oplossing van dit kwadratuurvraagstuk de sleutel zou geven, waarmee het mogelijk was om te kunnen doordringen tot diepe geheimen en dat men aldus het wezen der dingen zou kunnen doorgronden. Anderen weer dachten, dat er hooge prijzen voor het vinden van een juiste constructie uitgeloofd waren. Om te illustreeren welke geest deze menschen, die jacht of het getal π maakten, bezielde, citeer ik een gedeelte uit het beroemde artikel van Lambert:

„Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen" [3]), dat ook nog nader ter sprake zal komen. Na er op gewezen te hebben, dat $\frac{961}{1225}$ en $\frac{3844}{1225}$ vrij sterk van $\frac{\pi}{4}$ resp. π afwijken, zegt hij:

„Indessen behalten die Zahlen 1225 und 961, oder 1225 und 3844 dennoch dadurch einen gewissen Werth, dass es Quadratzahlen sind. In diesem Jahrhundert sind, so viel ich weiss, ihrer drey darauf verfallen. Dieser Umstand scheint mir der merkwürdigste. Denn da es noch mehrere solcher Quadratzahlen giebt, so sollte man denken, dass jeder von diesen drey Erfindern auf andere Zahlen würde verfallen seyn. Der erste war Herr von Leistner, Kayserl. Rittmeister. Er fand die Zahlen 1225 und 3844, und diese wurden von einer Kayserl. Hofcommission als unrichtig erkannt, wowider aber in einer Anno 1740 herausgekommenen Schrift, *Nodus gordus* etc. protestirt wurde. Der andere war Herr Merkel Prediger zu Ravensburg in Schwaben. Seine Schrift kam erst Anno 1751 heraus. Er sagt aber, dass er lange vor dem Herrn von Leistner seine Zahlen 1225 und 961 zufälliger Weise gefunden habe, er sey aber erst durch den Nodum gordium bewogen worden, sie auf alle Proben zu setzen; was ihn aber fürnehmlich aufgebracht habe, sie durch den Druck bekannt zu machen, sey ein Articul in der Utrechter Zeitung gewesen, wo eine Quadratur angekündigt, und der vermeyntlich darauf gesetzte Preiss angefordert wurde; diese Nachricht habe ihm um so geschwinder die Feder in die Hand gegeben, weil er den vorhergehenden Winter seine Zahlen einem Franzosen, der wirklich nachher in die Niederlande verreisete, vorgerechnet, und auf das Papier nicht weiter Achtung gegeben, und so habe er starke Gründe zu vermuthen, dieser *Geometra* möchte mit seinem Kalbe gepflügt haben etc. Was damit nun weiter vorgegangen, ist mir nicht bekannt. Es wurde aber die Merkel'sche Schrift Anno 1765 von Herrn Prof. Bischoff zu Alten—Stettin mit Anmerkungen und noch mehreren Prüfungen wiederum aufgelegt, und die Zahlen 1225 und 961 als richtig erklärt. Bald darauf kamen sie im Anfange des 1766sten Jahres in den Zeitungen

[3]) Berlin 1770. Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, Band II, pag. 140—169. Ook afgedrukt bij F. Rudio: Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung, Leipzig 1892.

zum Vorschein, mit der sollennen Ankündigung, dass man fernerhin die Quadratur des Circuls nicht mehr zu suchen nötig habe, weil sie bereits, und zwar zum drittenmale gefunden etc. Es wäre eben nicht übel gethan, wenn viele, die noch künftighin sich an die Sache machen werden, dieses ganz feste glaubten, weil sie dadurch überhoben wären, Mühe, Zeit und Kräfte zu verlieren, die man als sehr vergebens angewandt ansehen kann, weil die meisten von denselben kaum eine leichte geometrische Aufgabe zu erfinden und aufzulösen im Stande sind . . ."

Het is leerrijk om even na te gaan welke proeven dan de genoemde Prof. Bischoff onderneemt. Hij vergelijkt wel degelijk $\frac{3844}{1225} = 3{,}137\ldots$ met de decimaalontwikkeling $\pi = 3{,}1415\ldots$, maar hij merkt op, dat deze ontwikkeling weliswaar heel nauwkeurig is, maar de oppervlakte van de cirkel toch niet juist aangeeft! Men ziet uit dit voorbeeld waartoe een inexacte begripsvorming leiden kan. De overige acht proeven van Bischoff zijn zoo gekozen, dat twee willekeurige kwadraatgetallen eraan voldoen.

De breuk $\frac{961}{1225} = \frac{31^2}{35^2}$ heeft de eigenschap, dat men bij een gegeven cirkel een vierkant krijgt met een ongeveer even groot oppervlak door de zijde van het vierkant gelijk te nemen aan $\frac{31}{35}$ van de middellijn van de cirkel. Lambert laat nu zien, hoe men dergelijke breuken in onbeperkt aantal vinden kan. Daartoe ontwikkelt hij de juiste verhouding tusschen middellijn en zijde bij even groot oppervlak, nl. $2 : \sqrt{\pi}$ in een kettingbreuk

$$2 : \sqrt{\pi} = 1 + \frac{1|}{|7} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|26} + \ldots,$$

met de naderende breuken $1, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{35}{31}, \frac{44}{39}, \frac{123}{109}$ enz. De gezochte verhoudingen zijn dan $1, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}$ (de Egyptische waarde) $\frac{31}{35}, \frac{39}{44}$[4]), $\frac{109}{123}$ enz.

Het hier besproken artikel van Lambert dankt zijn bekend-

---

[4]) De waarde $\frac{39}{44}$ was trouwens reeds in 1584 door de Fransche wiskundige Simon Duchesne, die in Nederland onder de naam Van der Eycke woonde, gevonden.

heid echter aan het feit, dat het een bewijs voor de onmeetbaarheid van π bevat. In 1766 had Lambert dit bewijs gevonden en in de bovengenoemde verhandeling gaf hij een populaire uiteenzetting van zijn bewijsvoering. Daardoor werd het duidelijk, dat de vroeger gevonden waarden voor π zeker onjuist waren en hoogstens goede benaderingen gaven. De titel „Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen" drukt reeds genoegzaam uit tot welk publiek Lambert zich daarbij wendde. Enkele jaren vroeger had hij zijn ontdekking reeds in een meer wetenschappelijke verhandeling [5]) gepubliceerd. Dit artikel is bewonderenswaardig geschreven en treft door de voor zijn tijd zoo buitengewone exactheid. Eenige tijd geleden is het me gelukt om dit bewijs van Lambert sterk te vereenvoudigen, doordat ik geen gebruik van de kettingbreuktheorie hoefde te maken. Deze vereenvoudiging vindt U in § 2 van dit opstel.

Of Lambert met zijn „Vorläufige Kenntnisse . . ." veel onmiddellijk succes gehad heeft, weet ik niet, maar toch zal de beteekenis van zijn ontdekking wel langzamerhand tot het groote publiek doorgedrongen zijn. Ook zullen zijn publicaties er waarschijnlijk toe medegewerkt hebben, dat in 1775 de Parijsche Academie het volgende besluit nam: „L'Académie a pris, cette anneé la résolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annonceé comme un mouvement perpétuel." Merkwaardig is echter, dat bij de motiveering van dit besluit geen gewag wordt gemaakt van het onmeetbaarheidsbewijs van Lambert.

Wie van deze dingen meer wil weten, leze het elementair geschreven boekje van F. Rudio, dat reeds in noot [3]) genoemd werd. Men lette er echter op, dat de schrijver Lambert onrecht aandoet door de voorstelling alsof Legendre een leemte in het bewijs over de onmeetbaarheid van π aangevuld zou hebben. Waarschijnlijk was Rudio onbekend met de inhoud van het in noot [5]) genoemde artikel van Lambert [6]).

---

[5]) J. H. Lambert, Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmétiques. Histoire Acad. roy. des sciences et belles lettres. Berlin, Année 1761 (1768), pag. 265—322.

[6]) Zie A. Pringsheim, Über die ersten Beweise der Irrationatität von e und π, Sitzungsberichte der Königl. Akademie zu München 28 (1898), pag. 325—337.

Een der eersten, die bewust naar een benaderde waarde van π zocht, was Archimedes. Van hem is o.a. de bekende benadering $3\frac{1}{7} = 3{,}1428\ldots$, die hij vond met behulp van de bekende methode, waarbij de cirkelomtrek ingesloten wordt tusschen een om- en een ingeschreven regelmatige n-hoek.

De meetkundige methoden van Archimedes werden later door een aantal Nederlanders, onder wie Huygens en Snellius wel de belangrijkste zijn, tot in de perfectie uitgewerkt. Het gelukte zoodoende om een groot aantal decimalen van π te bepalen. Ja, Ludolf van Ceulen moet zelfs 35 decimalen bepaald hebben, die volgens zijn laatste wensch op zijn grafzerk zouden zijn ingegrift. Dit groote aantal, te zamen met de naam „Van Ceulen" schijnt een dergelijke indruk gemaakt te hebben, dat men in de (oudere) Duitsche literatuur heel vaak de benaming „die Ludolph'sche Zahl" voor π aantreft.

Door de meetkundige methoden was het theoretisch mogelijk om een willekeurig aantal decimalen van π te berekenen. De analyse echter gaf middelen aan de hand om met veel minder moeite ditzelfde resultaat te bereiken. Zoo vond Shanks zelfs 707 decimalen voor π. Het behoeft geen betoog, dat de hier bereikte nauwkeurigheid verre uitgaat boven de eischen van de practijk. Aan de andere kant is dit aantal van 707 decimalen veel te gering om hieruit door inductie conclusies te trekken met betrekking tot de vraag over het karakter van de decimaalontwikkeling van π. Toch heeft deze berekening van Shanks geleid tot een eigenaardige strijdvraag:

Onder de decimalen van de reeksontwikkeling

$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

komen alle cijfers voor. Het aantal malen, dat een bepaald cijfer in de eerste 700 decimalen van Shanks voorkomt, vindt men in onderstaand staatje:

cijfer	frequentie	cijfer	frequentie
0	73	5	63
1	77	6	70
2	74	7	51
3	72	8	71
4	71	9	78

Alle cijfers komen dus ongeveer even vaak voor met uitzondering van 7, dat relatief zeldzaam is.

Is dit toeval of ligt hierachter een bepaalde wet verborgen? Men is geneigd aan toeval te denken, maar bij de tegenwoordige stand van de wetenschap lijkt het me niet mogelijk om dit probleem tot een oplossing te brengen [7]).

Natuurlijk was met het onmeetbaarheidsbewijs voor π het vraagstuk van de kwadratuur van de cirkel nog lang niet van de baan. Er zijn immers onmeetbare getallen, zooals $\sqrt{2}$, die zeer wel met passer en lineaal te construeeren zijn. Nu hadden de mathematici reeds vroeg ingezien, dat een willekeurig construeerbaar getal α zeker algebraïsch is, d.w.z. voldoet aan een algebraïsche vergelijking

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

met meetbare coëfficiënten $a_1, a_2 \ldots, a_n$. Kan men nu van een bepaald getal bewijzen, dat het transcendent, d.w.z. niet-algebraïsch, is, dan volgt, dat dit getal niet met passer en lineaal te construeeren is. In 1873 bewees Hermite [8]), dat e transcendent is en, door de methode van Hermite uit te breiden, slaagde Lindemann [9]) in 1882 erin de transcendentie van π aan te toonen. Hiermee was dus tevens bewezen, dat π niet met passer en lineaal te construeeren is.

Het probleem om π bij benadering door meetbare getallen voor te stellen leidde tot een veel algemeenere vraag: Hoe sterk kunnen reëele getallen door meetbare benaderd worden?

Na Dirichlet en Minkowski hebben vele wiskundigen zich met dit probleem bezig gehouden. In dit artikel kan ik hierop niet verder ingaan, omdat mij dat te ver zou voeren.

---

[7]) Vergelijk de artikels van R. de Montessus de Ballore, P. Lévy, P. Salet en E. Borel in Sphinx (revue mensuelle des questions récréatives) 3 (1933), pag. 51—96; 4 (1934), pag. 15—16, 32, 81—84, 97—98.

[8]) Ch. Hermite, Sur la fonction exponentielle, Oeuvres III, pag. 150—181.

[9]) F. Lindemann, Ueber die Zahl π. Mathem. Annalen Bd. 20 (1882), pag. 213—225.
Über die Ludolph'sche Zahl, Sitzungsberichte preuss. Akad. d. Wissensch. 1882, pag. 679—682.

§ 2. *Het bewijs van Lambert over de onmeetbaarheid van π in vereenvoudigde vorm.*

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

We nemen in dit bewijs aan, dat $x \neq 0$ is; dus

$$x^{-1} \sin x = \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots$$

Differentiatie geeft

$$-x^{-2} \sin x + x^{-1} \cos x = -\frac{2x}{3!} + \frac{4x^3}{5!} - \frac{6x^5}{7!} + \frac{8x^7}{9!} - \ldots$$

$$= -2\left(\frac{1 \,.\, x}{3!} - \frac{2 \,.\, x^3}{5!} + \frac{3x^5}{7!} - \frac{4x^7}{9!} + \ldots\right).$$

Herhalen we de uitgevoerde bewerkingen, dan vinden we

$$-x^{-3} \sin x + x^{-2} \cos x = -2\left(\frac{1}{3!} - \frac{2x^2}{5!} + \frac{3x^4}{7!} - \frac{4x^6}{9!} + \ldots\right),$$

$$(3x^{-4} - x^{-2}) \sin x - 3x^{-3} \cos x = -2\left(\frac{-2 \,.\, 2x}{5!} + \frac{4 \,.\, 3x^3}{7!} - \frac{6 \,.\, 4x^5}{9!} + \ldots\right)$$

$$= (-2)^2\left(\frac{1 \,.\, 2x}{5!} - \frac{2 \,.\, 3x^3}{7!} + \frac{3 \,.\, 4x^5}{9!} - \ldots\right).$$

Door volledige inductie zullen we nu algemeen bewijzen, dat er bij elk getal $h = 0, 1, 2, \ldots$ steeds veeltermen $p_h\ (x^{-1})$ en $q_h\ (x^{-1})$ in x^{-1} te vinden zijn, zoodat

$$(1) \quad \begin{cases} p_h(x^{-1}) \sin x + q_h(x^{-1}) \cos x = \\ = (-2)^h\left(\dfrac{h!}{(2h+1)!}x - \dfrac{2 \,.\, 3 \ldots (h+1)}{(2h+3)!}x^3 + \dfrac{3 \,.\, 4 \ldots (h+2)}{(2h+5)!}x^5 - \ldots\right) = \\ = (-2)^h \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+h)}{(2h+2n+1)!} x^{2n+1} \end{cases}$$

is. Verder, dat deze veeltermen *geheele* coëfficiënten hebben en hoogstens van de graad $2h$ zijn.

Is dit eenmaal aangetoond, dan kunnen we de onmeetbaarheid van π heel eenvoudig bewijzen.

Voor $h = 0$ stellen we $p_0(x^{-1}) \equiv 1$, $q_0(x^{-1}) \equiv 0$ en dan gaat (1) over in de reeksontwikkeling van $\sin x$[10]).

Vervolgens nemen we aan, dat (1) reeds voor h bewezen is en

---

[10]) Een leeg product wordt gelijk 1 gesteld, dus $0! = 1$, enz.

toonen daarna aan, dat de bewering ook geldt met $h+1$ in plaats van h:

Wegens $x \neq 0$ volgt uit (1)

$$x^{-1} p_h(x^{-1}) \sin x + x^{-1} q_h(x^{-1}) \cos x =$$
$$= (-2)^h \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+h)}{(2h+2n+1)!} x^{2n}.$$

Differentiatie geeft

$$\left\{\frac{d}{dx}\left(x^{-1} p_h(x^{-1})\right) - x^{-1} q_h(x^{-1})\right\} \sin x +$$
$$+ \left\{x^{-1} p_h(x^{-1}) + \frac{d}{dx}\left(x^{-1} q_h(x^{-1})\right)\right\} \cos x =$$
$$= (-2)^h \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n(n+1)(n+2)\dots(n+h)}{(2h+2n+1)!} x^{2n-1}.$$

Nemen we als nieuwe sommatievariabele $\nu = n-1$, dan wordt het rechterlid blijkbaar

$$= (-2)^{h+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\dots(\nu+h+1)}{(2h+2\nu+3)!} x^{2\nu+1}.$$

Stellen we

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-1} p_h(x^{-1})\right) - x^{-1} q_h(x^{-1}) = p_{h+1}(x^{-1}),$$
$$x^{-1} p_h(x^{-1}) + \frac{d}{dx}\left(x^{-1} q_h(x^{-1})\right) = q_{h+1}(x^{-1}),$$

dan is dus

$$p_{h+1}(x^{-1}) \sin x + q_{h+1}(x^{-1}) \cos x =$$
$$= (-2)^{h+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+h+1)}{(2h+2+2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Hierin zijn blijkbaar $p_{h+1}(x^{-1})$ en $q_{h+1}(x^{-1})$ veeltermen met geheele coëfficiënten in x^{-1}. Verder zijn $x^{-1} p_h(x^{-1})$ en $x^{-1} q_h(x^{-1})$ hoogstens van de graad $2h+1$, zoodat $p_{h+1}(x^{-1})$ en $q_{h+1}(x^{-1})$ hoogstens van de graad $2(h+1)$ zijn.

We hebben dus bewezen, dat de betrekking (1) ook met $h+1$ inplaats van h geldt. De relatie (1) is dus algemeen voor $h = 0, 1, 2, \dots$ bewezen. Ze levert ons heel gemakkelijk een onmeetbaarheidsbewijs voor π:

Stel, dat π en dus ook $\frac{\pi}{4}$ meetbaar was: $\frac{\pi}{4} = \frac{a}{b}$ (a en b natuurlijke getallen). We passen nu de betrekking (1) toe met

$$x = \frac{\pi}{4}, \text{ dus } \sin x = \cos x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Dan krijgen we voor elk getal $h = 0, 1, 2, \ldots$

$$(2) \quad \left\{p_h\left(\frac{b}{a}\right) + q_h\left(\frac{b}{a}\right)\right\}\tfrac{1}{2}\sqrt{2} =$$

$$= (-2)^h \left(\frac{h!}{(2h+1)!}\,\frac{\pi}{4} - \frac{2.3\ldots(h+1)}{(2h+3)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$= (-2)^h \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+h)}{(2h+2n+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}.$$

Hier staat rechts een alterneerende reeks, waarvan de termen in absolute waarde afnemen en tot nul naderen: Inderdaad is voor $n = 0, 1, \ldots$

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+h)}{(2h+2n+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} > \frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+h+1)}{(2h+2n+3)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+3},$$

want dit is gelijkwaardig met

$$n+1 \qquad > \frac{n+h+1}{(2h+2n+2)(2h+2n+3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Volgens een bekende stelling over de alterneerende reeks [11]) ligt dan de som van de reeks

$$\frac{h!}{(2h+1)!}\,\frac{\pi}{4} - \frac{2.3\ldots(h+1)}{(2h+3)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \ldots$$

tusschen

$$\frac{h!}{(2h+1)!}\,\frac{\pi}{4} \text{ en } \frac{h!}{(2h+1)!}\,\frac{\pi}{4} - \frac{2.3\ldots(h+1)}{(2h+3)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 > 0.$$

Uit (2) volgt dus

$$0 < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left|p_h\left(\frac{b}{a}\right) + q_h\left(\frac{b}{a}\right)\right| < 2^h \frac{h!}{(2h+1)!}\,\frac{\pi}{4} < \frac{2^h}{h!}.$$

Nu is $a \neq 0$; bijgevolg is voor elke $h = 0, 1, 2, \ldots$

$$0 < \left|a^{2h} p_h\left(\frac{b}{a}\right) + a^{2h} q_h\left(\frac{b}{a}\right)\right| < \sqrt{2}\,\frac{2^h |a|^{2h}}{h!}.$$

---

[11]) Zie elk leerboek over reeksen, bv. F. Schuh, Beknopte Hoogere Algebra, § 219, pag. 500—501.

De laatste ongelijkheid levert echter voor voldoend groote h een tegenspraak op: Immers omdat $p_h(x)$ een veelterm in x is met geheele coëfficiënten is $p_h\left(\frac{b}{a}\right)$ een breuk met noemer van de vorm a^g, waar g de graad van $p_h(x)$ is. Wegens $g \leqq 2h$ is dus $a^{2h}\, p_h\left(\frac{b}{a}\right)$ geheel. Analoog bewijst men, dat $a^{2h}\, q_h\left(\frac{b}{a}\right)$ geheel is. Volgens de vorige ongelijkheid is dus het *natuurlijke getal*

$$\left| a^{2h}\, p_h\left(\frac{b}{a}\right) + a^{2h}\, q_h\left(\frac{b}{a}\right) \right|$$

kleiner dan $\sqrt{2}\,\frac{(2\,|a|^2)^h}{h!}$, terwijl

$$\lim_{h\to\infty} \sqrt{2}\,\frac{(2\,|a|^2)^h}{h!} = 0$$

is, wat blijkbaar onmogelijk is.

Ons uitgangspunt, dat π rationaal is, was dus fout.

Aan het hiervoor gegeven bewijs van de onmeetbaarheid van π liggen dezelfde ideeën ten grondslag als aan het bewijs van Lambert. Ik heb alleen de moeite genomen om het bewijs van Lambert te bevrijden van de kettingbreuktheorie, waardoor het veel meer overzichtelijk wordt. Zeer verwant hiermee is overigens het onmeetbaarheidsbewijs voor π^2 van Hermite[12]), waarbij in plaats van reeksontwikkelingen gebruik gemaakt wordt van bepaalde integralen.

---

[12]) Ch. Hermite, Sur quelques approximations algébriques. Oeuvres III, pag. 146—149.

EEN NIEUW BEWIJS VOOR DE STELLING VAN EULER VOOR CONVEXE VEELVLAKKEN[1])

De stelling luidt: *In elk convex veelvlak is de som van het aantal hoekpunten en het aantal zijvlakken twee meer dan het aantal ribben.*

We leiden het bewijs in met een voorbeeld; zie fig. 1.

Door de 7 hoekpunten van een veelvlak zijn evenwijdige vlakken gebracht, die alle verschillend zijn en die dus geen van alle een ribbe, een zijvlaks- noch een lichaamsdiagonaal bevatten; op fig. 1 hebben we ze horizontaal getekend. We laten om zo te zeggen het vlak I zakken tot het achtereenvolgens de standen II, III enz. inneemt. Daarbij tellen we, hoeveel hoekpunten we passeren, hoeveel ribben en hoeveel zijvlakken; met „vlak" bedoelen we de met Romeinse cijfers aangewezen evenwijdige vlakken; met „zijvlak" de vlakdelen, die het veelvlak vormen.

Het aantal hoekpunten H komt overeen met het aantal vlakken.

Het vlak I zakt tot II; 1 en 2 zijn uiteinden van een ribbe; telt men de ribben, die van I uitgaan, elk voor $\frac{1}{2}$, dan zal de andere $\frac{1}{2}$ van ribbe 12 in II worden geteld; de andere helft van ribbe 13 in III, van 14 in IV, van 15 in V. Tellen we in elk vlak de daarin uitkomende ribben allemaal voor $\frac{1}{2}$, dan krijgen we ze precies alle één keer; opv. in fig. 1 dus 2, $2\frac{1}{2}$, 2, 2, $2\frac{1}{2}$, 2, 2 samen 15.

Bij vlak I door de top van een a-vlakshoek komen samen a zijvlakken, die we evenals de a ribben, voor $\frac{1}{2}$ rekenen. Noemen we in de loop van de telling H' het aantal hoekpunten, Z' het aantal zijvlakken en R' het aantal ribben, dan geldt bij 1 de betrekking $H' + Z' = R' + 1$, nl. $1 + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a + 1$. Nu zakt vlak I tot de stand II; als we daar een n-vlakshoek hebben, dan wordt H' 1 meer en R' wordt $\frac{1}{2}n$ meer; elk zijvlak, dat door vlak II gesneden

---

[1]) Het bewijs is uitgedacht door K. Harlaar; het voorbeeld als inleiding is door mij geschreven. Het komt in deze vorm voor in de 9e druk van Dr. Molenbroek, Leerboek der Stereometrie.

W.

wordt (zie 123 en 124) tellen we bij II niet mee; 123 tellen we voor ½ in I, en voor ½ bij III; 124 ook voor ½ in het hoogste punt en in het laagste punt, dus in I en in IV. Van de *n* zijvlakken van elke

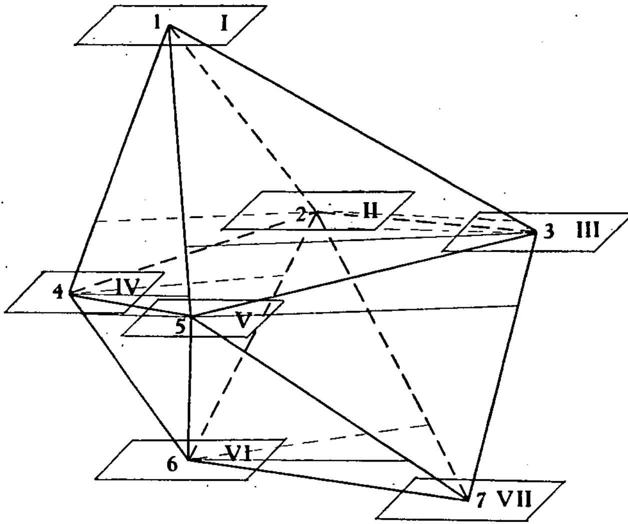


Fig. 1.

De stelling van Euler; een voorbeeld vooraf.

veelvlakshoek, waarvan de top in een der tussenvlakken ligt, tellen we er 2 niet mee, dus ondergaat Z' de vermeerdering $(n - 2) \times \frac{1}{2}$; het eerste lid van $H' + Z' = R' + 1$ wordt $1 + (n - 2) \times \frac{1}{2}$ meer, het tweede $\frac{1}{2}n$ meer. Bij het passeren van elk tussenvlak gaat dat zo door; we schrijven de resultaten van de tellingen even op (zie fig. 1):

	H'	Z'	R'
in I	1	+ 2	= 2 + 1
in II	1	+ $1^1/_2$	= $2^1/_2$
in III	1	+ 1	= 2
in IV	1	+ 1	= 2
in V	1	+ $1^1/_2$	= $2^1/_2$
in VI	1	+ 1	= 2
in VII	1	+ 2	= 2 + 1

$$+ \qquad\qquad +$$

$$\mathbf{H + Z = R + 2.}$$

Let op VII, daar geldt natuurlijk hetzelfde als voor I; men kon immers ook van onderen af beginnen te tellen.

Elk vlak, evenals elke ribbe wordt voor ½ geteld in zijn hoogste en laagste punt, dat is eigenlijk de hele zaak.

Bewijs (zie fig. 104). Om van een convex veelvlak de aantallen van de zijvlakken, hoekpunten en ribben, die we opv. Z, H en R zullen noemen, te bepalen, gaan we als volgt te werk. We brengen door de hoekpunten evenwijdige vlakken aan zo, dat in elk vlak juist één hoekpunt ligt. Dit is zeker mogelijk; immers door een punt P gaat slechts een eindig aantal rechten, die elk evenwijdig zijn of samenvallen met een der rechten m_i door twee hoekpunten van het veelvlak (dragers van ribben, zijvlaks- en lichaamsdiagonalen). Er is dus een rechte l door P, die met geen van de rechten m_i evenwijdig is of er mee samenvalt. Bij elk van de rechten m_i is er dus juist één vlak door l, dat met m_i evenwijdig is, of door m_i gaat. Er zijn dus van zulke vlakken hoogstens zoveel, als er rechten m_i zijn. We kunnen dus een vlak U door l aanbrengen, dat alle rechten m_i snijdt. De evenwijdige vlakken door de hoekpunten, die in stand met U overeenstemmen, bevatten dus elk slechts één hoekpunt.

Fig. 2. Stelling van Euler.

We nummeren de vlakken in volgorde, dus zo, dat vlak i ligt tussen de vlakken $i - 1$ en $i + 1$ $(2 \leqq i \leqq H - 1)$ en nummeren tevens de hoekpunten als de er door gaande vlakken. We gaan nu de vlakken na en tellen daarbij de hoekpunten, ribben en zijvlakken en wel elk hoekpunt bij het vlak, waarin het ligt, elke ribbe voor ½ bij elk van de twee vlakken, waarin de eindpunten liggen en elk zijvlak voor ½ bij elk van de beide vlakken, waarin een hoekpunt van het zijvlak ligt, doch die het zijvlak niet snijden, dus, waarin het laagst en het hoogst genummerde hoekpunt liggen. Bij vlak 1 tellen we dus, als de veelvlakshoek met hoekpunt 1 als top a zijden, dus ook a ribben heeft, 1 hoekpunt, $½a$ ribben en $½a$ zijvlakken, immers elk der a in hoekpunt 1 samenkomende ribben telt nu voor

$\frac{1}{2}$ en evenzo elk der a in dit hoekpunt samenkomende zijvlakken, daar dit hoekpunt hun laagst genummerde is. Evenzo tellen we bij het hoogst genummerde vlak 1 hoekpunt, $\frac{1}{2}b$ ribben en $\frac{1}{2}b$ zijvlakken, als b het aantal zijden is van de veelvlakshoek met het hoogst genummerde hoekpunt tot top. Ligt in een van de tussenliggende vlakken, b.v. V, de top van een c-vlakshoek, dan tellen we 1 hoekpunt, $\frac{1}{2}c$ ribben en $\frac{1}{2}(c — 2)$ zijvlakken. Immers V doorsnijdt nu de c-vlakshoek, want als de c-vlakshoek, afgezien van de top, geheel aan één kant van V zou liggen, dan lag het binnengebied van het veelvlak ook geheel aan die kant van V en moest V het laagst of het hoogst genummerde vlak zijn. V snijdt dus twee zijden van de veelvlakshoek, daar deze convex is. De in deze zijden liggende zijvlakken van het veelvlak worden bij V dus niet geteld. De $(c — 2)$ overschietende in de top van de veelvlakshoek samenkomende zijvlakken worden niet door V gesneden en tellen dus voor $\frac{1}{2}(c — 2)$. We vinden dus, dat de bijdragen van elk der evenwijdige vlakken, behalve het laagst en het hoogst genummerde, tot $H + Z$ en tot R even groot zijn. Van elk der overschietende twee vlakken is de bijdrage tot $H + Z$ 1 groter dan die tot R, zodat we vinden

$$\mathbf{H + Z = R + 2.}$$

In fig. 2 loopt de telling als volgt:

nr.	H	Z	R
1	1	$1^1/_2$	$1^1/_2$
2	1	$^1/_2$	$1^1/_2$
3	1	$^1/_2$	$1^1/_2$
4	1	$^1/_2$	$1^1/_2$
5	1	$^1/_2$	$1^1/_2$
6	1	1	2
7	1	1	2
8	1	1	2
9	1	$^1/_2$	$1^1/_2$
10	1	$^1/_2$	$1^1/_2$
11	1	$^1/_2$	$1^1/_2$
12	1	1	2
13	1	2	2
	13	11	22

BOEKBESPREKING.

Prof. Dr. F. A. Vening Meinesz. *Kort overzicht der Kartografie.* Uitgave P. Noordhoff N.V., Groningen. Prijs *f* 1.75, geb. *f* 2.40.

Het doel der kartografie is het driedimensionale aardoppervlak zo juist mogelijk in een tweedimensionaal teken- of kaartvlak af te beelden. Bedenkt men, dat de aarde een zeer grillige vorm heeft, waarvoor weliswaar — bij eerste benadering — afgezien van bulten en kuilen een bolvorm en bij verdere benadering een ellipsoïde kan worden aangenomen, dat echter deze beide oppervlakken niet ontwikkelbaar zijn, dan heeft men meteen een helder inzicht in de moeilijkheden, welke de kartografie tot oplossing moet brengen.

Deze bestaan voornamelijk in het terugbrengen (projecteren) van het aardoppervlak, met de erop voorkomende topografie, tot een ontwikkelbaar vlak. Heeft men dit bereikt, dan is de kartering slechts een kwestie van meet- en tekentechniek. Het hoofdprobleem wordt in twee étappen opgelost, waarvan de eerste steeds dezelfde is en wel het langs de verticaal (richting van de versnelling van de zwaartekracht) projecteren der terreinpunten op de geoïde, dat is het lichaam, omsloten door het tot stilstand gebrachte water van zeeën en oceanen, doorgetrokken gedacht onder de continenten. Afhankelijk van de gewenste nauwkeurigheid neemt men voor deze geoïde een bol (R = 6371.2 km) of een ellipsoïde (afplatting $\frac{1}{300}$). De laatste wijkt volgens de huidige stand van de wetenschap — waartoe de zwaartekrachtmetingen van den schrijver veel hebben bijgedragen — nergens meer dan 100 m van de geoïde af.

De tweede stap is dan het projecteren van de geoïde op een of ander ontwikkelbaar oppervlak.

De drie in aanmerking komende projectievlakken zijn: 1e. een plat vlak, 2e. een kegelmantel en 3e. een cylindermantel. Zowel de plaats waar deze worden aangebracht, als die van het projectie-centrum kunnen willekeurig worden gekozen, zodat er een zeer groot aantal methoden bestaat, die verschillende voor- en nadelen hebben. Deze worden behandeld in hoofdstuk I. *Leer der Kaartprojecties.* Het is niet te verwonderen dat dit de hoofdschotel van het onderhavige boekje vormt, namelijk ruim twee derde gedeelte (57 van de 82 bldz.).

Bij deze projectie worden in het algemeen hoeken, oppervlakten en lengten vervormd of veranderd. In 6 stellingen worden algemeen geldige formules voor deze vervormingen gegeven. Het blijkt mogelijk de projectie zodanig uit te voeren, dat hetzij hoeken niet veranderen (conforme projectie o.a. van belang voor de scheepvaart, waarbij vooral de conforme cylinder- of mercatorprojectie in aanmerking komt, omdat een bepaalde route gevolgd kan worden op het kompas), hetzij oppervlakken gelijk blijven (equivalente projectie, van belang

voor het bepalen van grootte van terreinen uit kaarten). Ook kan de projectie dusdanig geschieden, dat bepaalde lengten niet veranderen (equidistante projectie), van belang voor het bepalen van de lengte b.v. van luchtvaart-routen, waarvoor echter ook de gnomonische projectie zeer in aanmerking komt, omdat daarbij grote cirkels op de bol rechte lijnen in de kaart worden. De afleiding dezer formules is — evenals de verdere opzet van het boekje — zodanig, dat mensen met geringe wiskundige ondergrond deze kunnen volgen. Het komt mij echter voor dat de onmiddellijk op elkaar volgende stellingen als even zoveel hamerslagen op het brein van dezulken zullen neerkomen. Naar wij hopen zullen zij zich daardoor niet laten afschrikken, want de rest wordt in minder compacte en zeer overzichtelijke vorm gegeven.

De schrijver onderscheidt azimuthale-, kegel-, cylinder- en andere kaartprojecties, alsmede in het kort enige weinig belangrijke methoden, waaraan we hier voorbijgaan.

Van de azimuthale projecties, dat zijn projecties van de (benaderde) geoïde op een raakvlak aan de bol, dat in de pool (normale ligging) in een punt van de equator (transversale ligging) of in een willekeurig punt (scheve ligging) kan zijn aangebracht, worden behandeld: *a.* orthografische, *b.* centrale, *c.* stereografische, *d.* equivalente en *e.* equidistante projectie.

De opmerking dat de stereografische projectie — welke conform is, en bovendien de eigenschap heeft dat cirkels in vlakken evenwijdig aan het projectievlak zich ook op de kaart als cirkels vertonen — voor de Nederlandse Rijksdriehoeksmeting (en daarmede tegenwoordig voor de kadastrale en topografische kaarten) is toegepast (bldz. 25) is niet geheel juist. De hier te lande gebruikte methode is n.l. een gewijzigde stereografische projectie, waarbij niet het raakvlak in het centrum des lands (Amersfoort) aan de geoïde, doch een meer naar het middelpunt van de aarde verschoven en evenwijdig daaraan gelegen vlak voor de projectie is gebruikt. Dit heeft het voordeel, dat de lengteveranderingen eensdeels positief, anderdeels negatief worden en daardoor aan de landsgrenzen kleiner.

De cylinderprojecties, dat zijn projecties, waarbij het bolopervlak eerst wordt geprojecteerd op een daaraan rakende cylindermantel, waarvan de as bij normale ligging samenvalt met de aardas en bij transversale ligging in het equatorvlak is gelegen, en welke cylinder daarna volgens een beschrijvende wordt doorgesneden en opengerold, worden onderscheiden in conforme (mecator projectie), equivalente en equidistante cylinderprojecties.

De kegelprojecties, dat zijn projecties waarbij als projectievlak een kegelmantel wordt gekozen, hetwelk in het centrum van een af te beelden gebied aan de geoïde raakt, en die evenals in het vorige geval langs een beschrijvende wordt opengesneden, worden op overeenkomstige wijze verdeeld in conforme, equivalente en equidistante kegelprojecties.

Opmerking verdient, dat de azimuthale en cylinderprojectie bijzondere gevallen zijn van de kegelprojectie (tophoek is 180° resp. 0°).

Hierna worden — onder het hoofd *andere kaartprojecties* — die

van Sanson-Flamsteed, van Bonne, de polyconische projectie, de polyederprojectie alsmede die van de internationale wereldkaart besproken.

In hoofdstuk II wordt een beknopt inzicht in het tekenen van kaartprojecties gegeven. Naast enige technische wenken treft men de vervaardiging van kaarten volgens de voornaamste projectiemethoden aan.

In het derde Hoofdstuk geeft de schrijver, naast een beknopt inzicht in de noodzakelijkheid van het gebruik van signaturen, een beschouwing over een zeer belangrijk onderdeel van de kartografie, n.l. het aanduiden van hoogten. Een goede kaart moet immers de reliefvorm van de aarde weergeven, waartoe hoogtecijfers een gebrekkig, hoogtelijnen daarentegen een zeer goed hulpmiddel zijn, vooral als deze door doelmatige kleuren worden ondersteund. De „schrapjes methode" is daarvoor minder geschikt.

In het vierde en laatste hoofdstuk — *Kartometrie* — vindt men de eigenlijke handleiding voor het gebruik van een kaart, met name de wijze waarop daarvan lengte, breedte en hoogte van een punt, helling van een terrein, hoeken, lengten en oppervlakken zijn te bepalen.

In een boekje van deze omvang en opzet behoort naar mijn smaak de theoretische behandeling van de poolplanimeter mede omdat dit niet zonder hulp van de integraalrekening mogelijk is — niet thuis.

Blijkens het voorwoord is dit „Kort overzicht der Kartografie" „ontstaan als neerslag van wat de schrijver op zijn college kartografie voor studerenden in de geografie aan de Rijksuniversiteit te Utrecht heeft behandeld". Als gevolg van de algemene opvatting van het begrip academische vorming is het geen gewoonte, dat een hoogleraar zijn college laat drukken. Er zijn echter bij elke studierichting een niet onbelangrijk aantal bijvakken, die zich beter lenen tot schoolse dan tot academische behandeling. Het getuigt van moed en inzicht, dat Prof. Vening Meinesz dit onderwerp op deze wijze wil doceren. De studenten zullen er hem dankbaar voor zijn, en het rendement van het onderwijs zal er door stijgen. Het ware te wensen dat dit voorbeeld ruime navolging vond; er zijn nog altijd te veel professoren die wel hebben vernomen dat de boekdrukkunst is uitgevonden, maar die dat niet hebben verstaan. De betekenis van dit boekje gaat echter uit buiten de kring der geografen. Doordat het in een zo kort bestek een zo duidelijk en volledig inzicht geeft in de kartografie, zal het geodeten, zeevaarders en piloten een welkome gids zijn, terwijl het ook aan leken, die zich voor kaarten in het algemeen interesseren (en dat zijn er vele!) kan worden aanbevolen. Het voorziet in een behoefte en vult een leemte in de bestaande literatuur aan. Zonder afbreuk aan het uitstekend geslaagde geheel te willen doen, mogen enige — zij het weinig belangrijke — opmerkingen, die wellicht bij een herdruk gewicht in de schaal kunnen leggen, niet achterwege blijven.

1e. Hoewel de typografische verzorging uitstekend is, zou het geheel aan levendigheid winnen, door uitbreiding van het aantal voorbeelden van bestaande kaarten.

2e. Behalve de genoemde afleiding van de poolplanimeter, kan de bijlage, „enkele beginselen der goniometrie" zonder bezwaar worden weggelaten. Wie deze beginselen nog niet kent, kan met behulp van deze enkele grondslagen de gegeven afleidingen toch niet volgen. Bovendien staan er wel meer formules in de tekst, die niet van de grond af worden opgebouwd.

3e. Een goed gekozen literatuuropgave wordt door een daarop gegeven toelichting bruikbaar gemaakt. Dit is een uitstekende gedachte, waarbij het echter wat vreemd aandoet dat in deze toelichting juist de drie meest algemene van de vier opgegeven Hollandse publicaties niet worden genoemd. (Toch nog een restantje van een typisch academische methode?)

4e. De schrijver maakt onderscheid tussen spherische en vlakke geodesie. Tot de laatste wordt dan het landmeten en waterpassen gerekend. Aangezien bij het waterpassen (en zeker bij de trigonometrische hoogtemeting) ook met de bolvorm van de aarde rekening wordt gehouden, is er n.m.m. geen reden voor invoeren van dit begrip „vlakke" geodesie en verdienen de gebruikelijke benamingen, „hogere"- en „lagere" geodesie de voorkeur.

Amstelveen, 18 Febr. 1941.

Ir. H. J. van Steenis.

Prof. Dr. H. J. Pos, *Filosofie der Wetenschappen. Vijf inleidende voordrachten.* Van Loghum Slaterus' Uitgeversmaatschappij N.V. Arnhem. In 't jaar MCMXL. 101 blz.

Beoefenaren van wiskunde en natuurwetenschappen staan wel eens wat wantrouwend tegenover den philosoof van professie; wanneer hij in zijn wijsgeerige beschouwingen van de resultaten van hun wetenschappen geen notitie neemt, verwijten ze hem eenzijdigheid en als hij het wel doet, verdenken ze hem van beunhazerij. In het midden latend, in hoeverre deze houding soms gerechtvaardigd is, kan men met zekerheid vaststellen, dat ze tegenover den schrijver van het hierboven aangekondigde werkje volkomen misplaatst zou zijn. Hij is — men merkt het aan kleinigheden — in wiskunde evenmin volledig geschoold als in eenige natuurwetenschap, maar wanneer hij over deze vakken spreekt, valt er voor hen, die zulk een scholing wel hebben ondergaan, altijd iets te leeren; ze zullen zelfs — wanneer dat nog noodig is — met de philosophie verzoend raken, doordat ze zullen ervaren, hoe een wijsgeerig ingestelde blik hen in hun eigen vak dingen kan doen zien, die ze, binnen de grenzen van dat vak blijvend, er misschien nooit in zouden hebben opgemerkt.

Men kan daarom de lectuur van de vijf voordrachten, waarin Prof. Pos de philosophie der wetenschappen behandelt (hetgeen zeggen wil: waarin hij bewustheid aangaande de wetenschap wil wekken) aan de lezers van dit tijdschrift even krachtig aanraden, als men het aan de beoefenaren van de biologische en de cultuurwetenschappen doen kan.

Het zal iederen wiskundige reeds dadelijk verblijden, dat de schrijver afstand heeft gedaan van de nog vaak toegepaste indeeling der wetenschappen in natuur- en geesteswetenschappen, een indeeling,

die haar onbruikbaarheid reeds daardoor bewijst, dat zij, die haar aanvaarden, nooit weten te zeggen, tot welke van de twee categorieën de wiskunde eigenlijk behoort. Prof. Pos onderscheidt drie gebieden: de ervaringsvrije of apriorische wetenschappen, de wetenschappen van de natuur en die van de cultuur. Aan elk van deze gebieden wijdt hij een hoofdstuk; zij worden omlijst door een algemeene beschouwing over de idee van een philosophie der wetenschappen en door een kritische behandeling van de organisatie van hare beoefening aan de universiteit. Dit alles wordt in een uitermate boeiend en zeer helder gesteld betoog op waarlijk magistrale wijze behandeld.

De schrijver veroorlove mij een enkele opmerking naar aanleiding van een passage in zijn beschouwingen over wiskunde; men leest daarin op blz. 38: „De onregelmatigheden, die de getalnamen ook in de talen der cultuurvolkeren nog vertonen en die in de Arabische schrijfwijze zijn overgenomen, zijn toch maar restanten van een veel onregelmatiger naamgeving, waarin de getelde objecten een rol spelen, een ontwikkeling van het getalbegrip tevens, dat in ons decimaalsysteem zijn rationele uitdrukking heeft gevonden".

Deze zin is ten eerste niet recht duidelijk: men ziet niet, in welk grammaticaal verband de woorden „een ontwikkeling enz." tot het voorafgaande staan. Bovendien kan men echter den indruk niet van zich afzetten, dat de schrijver in de veel voorkomende verwarring van teltaal en cijferschrift verstrikt is geraakt; daar deze twee slechts weinig met elkaar te maken hebben, is het niet recht begrijpelijk, hoe het tweede de eerste kan corrigeeren; en wanneer men niettemin van overwinnen van onregelmatigheden wil spreken, is niet in te zien, dat alleen de Arabische schrijfwijze dit zou hebben gedaan. En verwart de schrijver ten slotte niet ook nog de begrippen decimaal talstelsel en positiesysteem?

Er zijn meer passages, die tot vragen en bedenkingen aanleiding geven; ik zie er echter van af, ze hier te vermelden, om niet door het aanwijzen van kleine gebreken de aandacht af te leiden van het eenige doel dezer aankondiging, dat in niet anders mag bestaan dan de opwekking, dit belangrijke boek aandachtig te lezen.

E. J. D.

Dr. Evert W. Beth, *Inleiding tot de wijsbegeerte der wiskunde* (Philosophische Bibliotheek onder leiding van Dr. E. de Bruyne, Dr. Fr. Fransen, Dr. F. van Goethem, Dr. Fr. de Hovre, Dr. F. Roels en Dr. F. Sassen. — Antwerpen—Brussel, N.V. Standaard-Boekhandel; Nijmegen—Utrecht, N.V. Dekker & Van der Vegt. — 8°, 270 bldz.).

Dat de steeds meer ontwakende belangstelling voor de nieuwere stromingen op wijsgerig, en meer in het biezonder kentheoretisch gebied, ook in katholieke kringen levendige weerklank vindt, is een hoogst verblijdend verschijnsel en de totstandkoming van de hierboven genoemde, hoewel beknopte toch zeer gedegen, inleiding tot de wijsbegeerte der mathesis, van de hand van een der ten deze meest bekwame en bevoegde jongeren mag voorzeker als een zeer

welkome uiting van die belangstelling worden aangemerkt. En dit te meer, omdat de schrijver zich bij de behandeling van zijn zo omvangrijk onderwerp op een zeer breed standpunt heeft gesteld en er naar heeft gestreefd, den lezer een zodanig inzicht in het wezen der bestaande controversen te geven, dat hij in staat is, zich daaromtrent zelf een eigen mening te vormen. „Natuurlijk heb ik zelf ook een mening", verklaart schrijver in zijn voorwoord, „en wel een zeer bepaalde, die ik overigens in verschillende geschriften heb ontwikkeld; die meening heb ik, waar daartoe aanleiding bestond, uiteengezet, en ze is, zooals vanzelf spreekt, op de behandeling van de problemen mede van invloed geweest; maar de bedoeling van dit werk is niet, mijn persoonlijke opvattingen tet propageeren." En dat het schrijver met deze verklaring ernst is geweest, blijkt wel het meest uit de gelukkige wijze, waarop hij er in is geslaagd, de inzichten van andersdenkenden door enkele pregnante woorden en welgekozen citaten weer te geven.

Wat de zakelijke inhoud van het werk zelf betreft, deze kan gevoeglijk in twee delen worden verdeeld. In de eerste vier hoofdstukken namelijk behandelt schrijver achtereenvolgens de meer biezondere problemen, die bij de wijsgerige beschouwing van de meetkunde en de getallenleer op de voorgrond treden, terwijl de volgende hoofdstukken aan een systematische uiteenzetting van de voornaamste der bij het onderzoek dezer problemen gehuldigde opvattingen en gevolgde denkmethoden zijn gewijd: het logicisme, het intuïtionisme van Brouwer, het formalisme van Hilbert, de semantisch-syntactische richting (Tarski, Carnap) en de psychologisch-relativistische opvattingen van de Hollandse significi worden achtereenvolgens uiteengezet en besproken. De aan de omvang van het werk gestelde grenzen hebben schrijver daarbij tot een wel zeer ernstige beperking genoodzaakt, doordien hij de uit filosofisch oogpunt zo uiterst belangrijke leer der verzamelingen van zijn beschouwingen heeft moeten uitsluiten. Gelukkig echter is die uitsluiting niet zó volledig geweest, dat zij ook de eigenlijke grondslagen der verzamelingsleer: de twee-eenheidsbeleving en het oneindigheidsbegrip zou omvatten. Integendeel, juist *deze* onderwerpen worden door schrijver zeer veelzijdig belicht, waarbij de fundamentele betekenis der twee-eenheidsbeleving als „de grondslag, tegelijk van elke quantitatieve bepaling en van elke qualitatieve onderscheiding" (blz. 243) op overtuigende wijze wordt blootgelegd en op het nauwe verband van het oneindigheidsbegrip met de onderscheiding van keuzenegatie en uitsluitingsnegatie enerzijds en die van de indikatieve en de emotioneel-volitionele betekeniselementen ener taaldaad anderzijds herhaaldelijk wordt gewezen. De grondige behandeling dezer begrippen doet het, anders wel pijnlijke, gemis van onderwerpen als de transfiniete getallenleer, de dimensietheorie en de Jordanse krommen en oppervlakken minder gevoelen.

Wat het eigen standpunt van schrijver betreft, dat door hem, zoals hij zich ook terecht had voorbehouden, waar het pas gaf, wordt aangegeven en verdedigd, kan opgemerkt worden, dat het nòch met de klassieke, streng aristotelische, nòch met de zuiver psychologistische opvattingen der nieuwere significi kan worden vereenzelvigd,

maar toch met beide uitersten belangrijke punten van verwantschap vertoont. Met de meer absolutistische denkwijze der aristotelische school strookt bijvoorbeeld zijn zienswijze, dat de mathematische wetten de waarneembare verschijnselen beheersen (bldz. 11) en dat de vraag naar het bestaan of niet-bestaan van oneindig veel tekens zinvol zou kunnen worden gesteld (bldz. 183), terwijl de meermalen door hem toegepaste analytische methode van begrippenonderzoek ongetwijfeld significh moet worden genoemd. Dat een dergelijk, tussen twee extremen het midden houdend standpunt een zeker gevaar voor onzekerheid en vaagheid medebrengt, ligt in den aard der zaak, en enige onzekerheid is naar de indruk van ondergetekende dan ook hier en daar onmiskenbaar. Vooral ten aanzien van het kantianisme komt schrijver ons niet geheel consequent voor. Enerzijds immers betoogt hij de volstrekte onhoudbaarheid van Kants oplossing van het ruimteprobleem in het licht der nieuwere onderzoekingen (bldz. 38) en anderzijds meent hij aan de door Kant in de transcendentale aesthetica neergelegde theorie van de tijd te moeten vasthouden (bldz. 265), terwijl toch de diepere analogie tussen Kants behandeling van beide fundamentele begrippen (of liever: psychische ordeningsprincipen) bezwaarlijk valt te ontkennen.

Hoe dit ook zij echter, als geheel genomen moet het werk van Dr. Beth als een uiterst belangrijke aanwinst voor de Nederlandse literatuur op mathematisch-filosofisch gebied worden aangemerkt, een aanwinst, die er zeker toe zal bijdragen, dit studieveld voor velen meer toegankelijk te maken, en tevens (wat wellicht van nog groter belang is) in ruimere kring het inzicht te wekken, dat de wijsbegeerte der wiskunde niet een *grensgebied* van de meer algemene wijsbegeerte uitmaakt, maar juist aan de *kernproblemen* van de epistemologie ten nauwste is verbonden. Dit inzicht toch is o.i. de grondgedachte, die het gehele werk doortrekt, een grondgedachte, die de schrijver op welsprekende wijze in de slotzin van het vijfde hoofdstuk tot uitdrukking heeft gebracht:

„Wie het wezen van de wiskundige denkwijze heeft begrepen, begrijpt het wezen van den denkenden geest.”

G. Mannoury.

HOOFDSTUK XII.

EVENWICHTEN VAN VLAKKE FIGUREN.

BOEK II.

Het hoofddoel van dit boek is de bepaling van het centrum der zwaarte van een segment eener orthotome, welk doel bereikt wordt in Prop. 8.

Deze bepaling is een gecombineerde toepassing van de in Boek I behandelde beginselen der barycentrische leer en de theorie van de quadratuur der orthotome; zij steunt verder nog op verschillende eigenschappen dezer kromme, die we reeds in Hoofdstuk III hebben verwerkt.

Het doet aanvankelijk vreemd aan, de redeneering te zien aanvangen met een propositie, die slechts een bijzonder geval is van de in de proposities 6 en 7 van Boek I algemeen bewezen hefboomswet.

Propositie 1.

Indien twee oppervlakken, omvat door een rechte en een orthotome, die we aan een gegeven rechte kunnen aanpassen, niet hetzelfde centrum hebben, zal het centrum der zwaarte van de uit deze beide samengestelde grootheid gelegen zijn op de rechte, die hare centra der zwaarte verbindt, terwijl het de genoemde rechte zoodanig verdeelt, dat de stukken ervan in verwisselde volgorde dezelfde reden hebben als de oppervlakken.

In deze propositie moet de tusschenzin „die we aan een gegeven rechte kunnen aanpassen" niet worden opgevat als een beperkende voorwaarde, aan de gebruikte segmenten opgelegd, maar als een herinnering aan de in *Quadratuur der Parabool* bewezen mogelijkheid van quadratuur van zulk een segment. Men moet het dus lezen als: „die, zooals we weten, in een rechthoek zijn om te zetten."

Het blijkt nu, dat Archimedes in deze eerste propositie een

eenigszins eenvoudiger bewijs van de hefboomswet geeft dan in Boek I.

Laat nl. (fig. 141) AB en $\Gamma\Delta$ de beide segmenten zijn, die in hun zwaartecentra E, Z aan een hefboom met steunpunt Θ bevestigd zijn. Gegeven is

$$(AB, \Gamma\Delta) = (\Theta Z, \Theta E)$$

Te bewijzen is, dat Θ het gemeenschappelijk centrum der zwaarte is.

Maak, als in Boek I, Prop. 6:

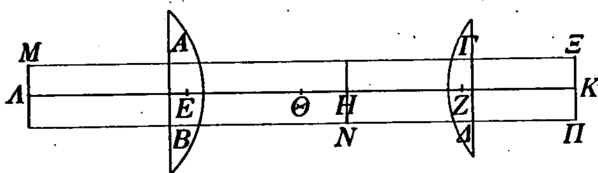


Fig. 141.

$$ZH = ZK = \Theta E \text{ en } E\Lambda = \Theta Z.$$

Daardoor is weer $\Theta Z = EH$, $\Lambda\Theta = K\Theta$

en $$(\Lambda H, HK) = (\Theta Z, \Theta E) = (AB, \Gamma\Delta) \qquad (1)$$

Pas nu het segment AB (dat volgens **Q. P.** $\frac{4}{3}$ maal zoo groot is als zijn ingeschreven driehoek) aan het lijnstuk ΛH aan en plaats den verkregen rechthoek MN zoo, dat ΛH de middens van twee evenwijdige zijden verbindt. E is dan centrum der zwaarte van MN. AB is dus vervangen door een daaraan gelijke grootheid op dezelfde plaats (in den zin van axioma VI). Vul den rechthoek MN aan met den rechthoek $N\Xi$, waarvan HK de middens van twee evenwijdige zijden verbindt en die dus Z tot zwaartecentrum heeft.

Wegens $$(\Lambda H, HK) = (MN, N\Xi)$$

is dan in verband met (1)

$$N\Xi = \Gamma\Delta.$$

Ook $\Gamma\Delta$ is dus vervangen door een daaraan gelijke grootheid op dezelfde plaats. Wegens $\Lambda\Theta = K\Theta$ is nu van den rechthoek $M\Pi$ het centrum der zwaarte Θ. Er is dus evenwicht en er blijft wegens axioma VI evenwicht, wanneer we de rechthoeken MN en $N\Xi$ weer door de segmenten AB en $\Gamma\Delta$ vervangen.

PROSPECTUS

P. WIJDENES

LOGARITHMEN- EN SINUSTAFEL

IN VIER DECIMALEN

DE HOEKEN MET MINUTEN OPKLIMMENDE

TAFEL H

INHOUD

IN 2 KLEUREN 56 BLZ. - GEC. *f* 0.60

P. NOORDHOFF N.V. – 1940 – GRONINGEN-BATAVIA

IN DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR
en bij N.V. Uitgevers-Maatschappij
NOORDHOFF-KOLFF, Laan Holle 7,
Batavia C.

Aanhalingen uit het

RAPPORT DER COMMISSIE

benoemd door het M.U.L.O.-verband inzake herziening leer- en examenprogramma der vakken

Wiskunde en Rekenen.

Blz. 4. Verschillende onderwerpen, vooral een groot aantal van meetkunde **B**, worden verder uitgesponnen dan practisch nodig is. Beter kan men deze beperken en hiervoor in de plaats de begrippen sinus, cosinus, tangens en cotangens aanbrengen.

Blz. 10. In de interpretaties voor B: de begrippen sinus, cosinus, tangens en cotangens; geen formules. Uitsluitend het opzoeken van de waarde van deze verhoudingen in de directe tafels voor hoeken van 0° tot 180°. Geen interpolatie.

Blz. 15. Voor de berekeningen zal gebruik gemaakt worden van een 4-decimalige rechtstreekse tafel met een verdeling tot in hele minuten zonder interpolatie.

Blz. 96. (bij de slotopmerkingen over Algebra B). Voorgesteld wordt de berekeningen uit te voeren met een logarithmentafel in 4 decimalen zonder interpolatie.

Dat laatste vatte men m.i. niet te letterlijk op: als men op blz. 6 van tafel H opzoekt log 12,466, dan ligt die logarithme tussen log 12,46 = 1,0955 en log 12,47 = 1,0959 en dan moet men noch het eerste, noch het tweede hebben, maar 1,0957. Dit geldt echter slechts voor een deel van de tafel; van het midden van blz. 7 af (log 1800 ongeveer) is het verschil slechts 2 eenheden of minder van de 4e decimaal.

☛ Invoering van de tafel in vier decimalen betekent een grote vereenvoudiging bij het M.U.L.O.

Invoering van de begrippen sinus, cosinus, tangens en cotangens is mogelijk door vermindering van de thans geldende B-stof voor Meetkunde. Voor de motivering zie men het gedegen Rapport van de Commissie.

Bij de samenstelling van deze

TAFEL IN VIER DECIMALEN

hebben we als eerste eis gesteld, dat deze gemakkelijk in het gebruik zou zijn; hoe daarvoor gezorgd is, wordt in het volgende kort aangegeven.

1. De bekende sterretjes, die voorkomen in een tafel met 5 decimalen, komen hierin niet voor; er is immers ruimte genoeg op een regel daar, waar men verandering heeft in het tweede cijfer van de mantisse, de eerste twee decimalen af te drukken bij alle getallen op dezelfde regel. Zie b.v. achter **162** op blz. **7** en zoveel andere.

2. De tafel van de natuurlijke waarden van de goniometrische verhoudingen, kort aangeduid als **Sinustafel** van blz. **25—47** geven we met opklimming van één minuut, zulks naar de wens van de Commissie, die het „Rapport" uitbracht en die daarmee een juist inzicht toonde in wat nodig en voldoende is.

3. De sinustafel hebben we gegeven in de gebruikelijke vorm nl. met de vier functies naast elkaar; deze gewone vorm is de beste; als men bovendien, zoals in deze kleine tafel, **4** volle graden naast elkaar overziet, dan wordt het bladeren tot een minimum beperkt.

4. Het weglaten van lange reeksen gelijke cijfers in de sinustafel, waardoor de eindcijfers beter in het oog springen, draagt mede niet weinig bij tot een gemakkelijk gebruik.

5. De tafels van de blz. 50—**53** zal men in vele gevallen met vrucht kunnen gebruiken. De samengestelde intrestrekening wordt terecht in het Rapport wat besnoeid, zodat men met de tafels voor $(1 + i)^n$ en $(1 + i)^{-n}$ kan volstaan. Daar berekeningen met logarithmen in vier decimalen daarvoor niet nauwkeurig genoeg zijn, bovendien onnodig bewerkelijk, zal het dan aanbeveling verdienen gebruik te maken van de rentetafels van blz. 50—53. Het meergenoemde Rapport zegt daaromtrent op blz. 28: „de berekeningswijze (met log. of rentetafels) wordt aan de keuze van den candidaat overgelaten." Een wijs besluit. — De rentetafels zijn in 6 decimalen, hetgeen zeker voldoende is; voor een kapitaal K

tot *f* 10000 zijn dan immers nog $(1 + i)^n K$ en $(1 + i)^{-n} K$ nog nauwkeurig op een cent. Wenst men ook nog de sommen van de getallen van tafel I en II en de annuiteitentafel, dan neme men Wijdenes Rentetafel D (*f* 0,50).

In het „Rapport" wordt gezegd, dat men in de Sinustafel niet moet interpoleren; zeer terecht. Daar de tafel ook na het verlaten van de school gebruikt zal worden in technische vakken, heb ik menen goed te doen met althans aan te geven, waar men met evenredige interpolaties niet meer kan vertrouwen op een of meer van de laatste decimalen; dat zal, dunkt mij, wel niemand hinderen.

Amsterdam Zuid
Jac. Obrechtstraat 88.

P. WIJDENES.

Aan alle hoofden van U.L.O. scholen wordt een pres. ex. gezonden van de tafel. Gaarne wordt een tweede verstrekt, indien men daartoe de wens te kennen geeft aan den uitgever.

De tweede propositie, waarin het begrip van op „bekende wijze" aan een segment eener orthotome ingeschreven figuur wordt ingevoerd, is behandeld in Hoofdstuk III; 2,5. We zullen de bedoelde figuur verder aanduiden door Ω.

Propositie 3.

Indien in elk van twee gelijkvormige door een rechte en een orthotome omvatte segmenten een rechtlijnige figuur op de bekende wijze beschreven wordt en de ingeschreven rechtlijnige figuren hebben beide evenveel zijden, dan verdeelen de centra der zwaarten van de rechtlijnige figuren de diameters der segmenten in gelijke reden.

Het is met het oog op de toepassing, die Archimedes in Prop. 8 van de op Prop. 3 steunende Prop. 7 zal maken, van belang, dat voor de geldigheid van deze stelling de voorwaarde van gelijkvormigheid der segmenten (III; 2,81) niet noodig is.

In het bewijs (fig. 142) worden de figuren $AE \ldots \Gamma$ en $\Xi\Sigma \ldots \Pi$ beschouwd, die op de bekende wijze beschreven zijn. Bekend is nu (III; 2,5), dat de opv. evenwijdige zijden der ver-

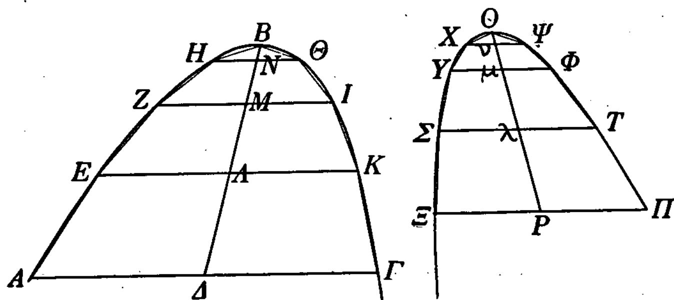


Fig. 142.

kregen trapezia ($H\Theta$, ZI enz. en evenzoo $X\Psi$, $Y\Phi$ enz.) zich verhouden als de opvolgende natuurlijke getallen en de hoogten der opv. trapezia als de opvolgende oneven getallen.

Van twee correspondeerende trapezia (resp. van de twee driehoeken $BH\Theta$ en $OX\Psi$) hebben dus de oppervlakten een constante verhouding, terwijl de zwaartecentra de binnen de trapezia gelegen stukken der diameters in evenredige deelen verdeelen. Hieruit volgt,

dat ook de zwaartecentra der geheele figuren $AE \ldots \Gamma$ en $\Xi\Sigma \ldots \Pi$ homoloog op de diameters liggen.

Propositie 4.

Van elk segment, omvat door een rechte en een orthotome, ligt het zwaartecentrum op den diameter van het segment.

Stel (fig. 143), dat het zwaartecentrum E van het segment Σ $(AB\Gamma)$ niet op den diameter $B\Delta$ ligt en dat de rechte door E parallel met den diameter de koorde $A\Gamma$ in Z ontmoet. Beschrijf in het segment $AB\Gamma$ den driehoek $AB\Gamma$ en bepaal nu een grootheid K door de betrekking

$$(\Gamma Z,\ \Delta Z) = (\triangle\ AB\Gamma,\ K).$$

Fig. 143.

Beschrijf nu in het segment Σ op de bekende wijze de figuur Ω, totdat de som der overblijvende segmenten $\Sigma - \Omega$ kleiner is dan K. Zij Θ het zwaartecentrum van Ω. Snijd ΘE in Λ met de rechte door Γ parallel met den diameter van het segment. Daar nu $\Omega > \triangle\ AB\Gamma$ en $\Sigma - \Omega < K$ geldt

$$(\Omega, \Sigma - \Omega) > (\triangle\ AB\Gamma, K) = (\Gamma Z, \Delta Z) = (\Lambda E, E\Theta).$$

Het zwaartecentrum M van $\Sigma - \Omega$ wordt nu uit de zwaartecentra E van Σ en Θ van Ω bepaald door de betrekking (Boek I, Prop. 8):

$$(ME, \Theta E) = (\Omega, \Sigma - \Omega).$$

Dus is

$$(ME,\ \Theta E) > (\Lambda E,\ \Theta E) \text{ dus } ME > \Lambda E$$

M ligt dus aan den anderen kant van $\Gamma\Lambda$ als E, wat onmogelijk is, omdat het geheele segment aan dezelfde zijde van $\Gamma\Lambda$ ligt als E.

Propositie 5.

Indien in een segment, omvat door een rechte en een orthotome, een rechtlijnige figuur op de bekende wijze wordt beschreven, ligt

het centrum der zwaarte van het geheele segment dichter bij den top van het segment dan het centrum van de ingeschreven rechtlijnige figuur.

Zij (fig. 144) $AB\Gamma$ het gegeven segment, waarin $\triangle\ AB\Gamma$ op de bekende wijze beschreven is. E zij het centrum der zwaarte van

Fig. 144.

$\triangle\ AB\Gamma$, Z het midden van AB,H dat van ΓB. Door Z en K zijn parallel aan $B\Delta$ de diameters ZK en $H\Lambda$ der segmenten AB en ΓB getrokken; hierop liggen de zwaartecentra Θ en I van die segmenten.

Archimedes merkt nu op, dat ΘIHZ een parallelogram is; dit is juist, maar het kan eerst na Prop. 7 worden ingezien. Zijn conclusie, dat het gemeenschappelijk zwaartecentrum X van de segmenten AB en ΓB tusschen N en B ligt en dus dat van het geheele segment $AB\Gamma$ (dat uit de segmenten AB en $B\Gamma$ met centrum X èn uit den driehoek $AB\Gamma$ met centrum E bestaat) tusschen B en E, blijft echter evenzeer juist, als men slechts weet (wat Prop. 4 waarborgt), dat Θ op KZ en I op ΛH ligt. De stelling is dus bewezen voor $\triangle\ AB\Gamma$ als figuur Ω.

Laat nu P en Π opv. centrum der zwaarte zijn van $\triangle\ AKB$ en $\triangle\ \Gamma\Lambda B$, dan weten we nu, dat Θ tusschen K en P, I tusschen Λ en Π ligt. Zij verder T het gemeenschappelijk zwaartecentrum der driehoeken AKB en $\Gamma\Lambda B$, dan ligt T op $B\Delta$ tusschen X en N.

Het zwaartecentrum Ψ[1]) van segment $AB\Gamma$ ligt nu zoo op XE, dat

$$(X\Psi, E\Psi) = (\triangle\ AB\Gamma,\ \text{segment } AB + \text{segment } B\Gamma) \qquad (1)$$

---

[1]) Dit punt Ψ en het nog in te voeren punt Φ zijn duidelijkheidshalve in de figuur niet aangegeven.

Het zwaartecentrum Φ van de figuur Ω $(AKB\Lambda\Gamma)$ ligt zoo op TE, dat

$$(T\Phi, E\Phi) = (\triangle AB\Gamma, \triangle AKB + \triangle \Gamma\Lambda B). \qquad (2)$$

Vergelijking van (1) en (2) leert

$$(X\Psi, E\Psi) < (T\Phi, E\Phi)$$

of

$$(XE, E\Psi) < (TE, E\Phi).$$

Hierin is $XE > TE$, dus moet $E\Psi > E\Phi$ zijn, zoodat Ψ dichter bij B ligt dan Φ.

De redeneering voortzettende (door nu in elk der segmenten AB en ΓB een figuur Ω met vijf zijden te beschrijven, waarvoor de stelling juist bewezen is) ziet men de juistheid voor iedere figuur Ω in.

Wij zouden het bewijs tegenwoordig geven door volledige inductie: denk de stelling bewezen voor een figuur Ω met $(2n + 1)$ zijden; beschrijf nu zulk een figuur Ω in elk der segmenten AB en ΓB; laat Θ en I weer de zwaartecentra der segmenten voorstellen, P en Π die der beschreven figuren Ω, dan geldt de geheele bovenstaande redeneering. De stelling is dus juist voor een figuur Ω met $(2n + 3)$ zijden. Zij is juist voor $n = 1$; dus geldt ze voor iedere waarde van n.

Propositie 6.

Wanneer een segment gegeven is, omvat door een rechte en een orthotome, is het mogelijk in het segment op de bekende wijze een rechtlijnige figuur te beschrijven, zoodat de rechte tusschen de centra der zwaarten van het segment en van de ingeschreven rechtlijnige figuur kleiner is dan elke voorgeschreven rechte.

Zij (fig. 145) gegeven het segment $\Sigma(AB\Gamma)$ met zwaartecentrum Θ en laat voorgeschreven zijn een lijnstuk Z. Gevraagd wordt een figuur Ω zoodat, als E haar zwaartecentrum is

$$\Theta E < Z.$$

Denk bepaald een oppervlakte X, zoodat

$$(\triangle AB\Gamma, X) = (B\Theta, Z).$$

Construeer een figuur Ω met zooveel zijden, dat

$$\Sigma - \Omega < X.$$

Wanneer nu $\Theta E \geqq Z$, dan is

$$(\Omega, \Sigma - \Omega) > (\triangle AB\Gamma, X) = (\Theta B, Z) \geqq (\Theta B, \Theta E).$$

Bepaal nu H op het verlengde van $E\Theta$ zoo, dat

$$(\Omega, \Sigma - \Omega) = (\Theta H, \Theta E).$$

Hieruit volgt

$$\Theta H > \Theta B.$$

Fig. 145.

Daar echter E zwaartecentrum van Ω is en Θ van Σ, is H zwaartecentrum van de figuur der buiten Ω overblijvende segmenten. Dit is echter onmogelijk, daar de segmenten alle aan dezelfde zijde van de rechte door B parallel met $A\Gamma$ liggen als Ω, terwijl H òf in B òf op het verlengde van ΘB ligt.

P r o p o s i t i e 7.

Van twee gelijkvormige door een rechte en een orthotome omvatte segmenten verdeelen de centra der zwaarten de diameters in dezelfde reden.

Fig. 146.

Laat gegeven zijn (fig. 146) de gelijkvormige segmenten $AB\Gamma$ en EZH met zwaartecentra opv. K en Λ. Te bewijzen is

$$(BK, K\Delta) = (Z\Lambda, \Lambda\Theta)$$

Is dit onjuist, dan moge M zoo op $Z\Theta$ bepaald worden, dat

$$(BK, K\Delta) = (ZM, M\Theta).$$

Beschrijf dan in EZH een figuur Ω met zooveel zijden, dat de afstand van haar zwaartecentrum Ξ tot Λ kleiner is dan ΛM (Prop. 6). Dan ligt Ξ tusschen Λ en M (omdat Ξ wegens Prop. 5 aan die zijde van Λ ligt, waar Θ gelegen is en waar ook M is aangenomen; zie Opmerking I). Beschrijf nu in $AB\Gamma$ een figuur Ω met evenveel zijden; is het zwaartecentrum hiervan P, dan is volgens Prop. 3:

$$(BP, P\Delta) = (Z\Xi, \Xi\Theta) < (ZM, M\Theta) = (BK, K\Delta)$$

dus

$$BP < BK \text{ in strijd met Prop. 5.}$$

Opmerking I. In het bewijs is M tusschen Λ en Θ aangenomen; dit is slechts het geval, als men onderstelt

$$(BK, K\Delta) > (Z\Lambda, \Lambda\Theta).$$

Onderstelt men echter

$$(BK, K\Delta) < (Z\Lambda, \Lambda\Theta)$$

dan is

$$(Z\Lambda, \Lambda\Theta) > (BK, K\Delta)$$

en dan kan men de redeneering beginnen bij het segment $AB\Gamma$.

Opmerking II. Van de onderstelling van gelijkvormigheid der segmenten is hier evenmin gebruik gemaakt als in Prop. 3. Archimedes past de bewezen stelling dan ook in Prop. 8 toe op willekeurige segmenten.

Thans volgt het bewijs van de hoofdstelling:

Propositie 8.

Van elk segment, omvat door een rechte en een orthotome, verdeelt het centrum der zwaarte den diameter van het segment zoodanig, dat het stuk aan den top van het segment anderhalf maal zoo groot is als het stuk aan de basis.

Zij $AB\Gamma$ (fig. 147) het gegeven segment met koorde $A\Gamma$ en top B. Te bewijzen is, dat het zwaartecentrum Θ zoo op den diameter $B\Delta$ ligt, dat $B\Theta = \frac{3}{2}\,\Delta\Theta$. Laat van de segmenten AB en ΓB opv. K en Λ de toppen, KZ en ΛH de diameters, M en N de

zwaartecentra zijn. Dan is $KZ \,//\, B\Delta \,//\, \Lambda H$ en $K\Lambda \,//\, A\Gamma \,//\, ZH$ (III; 2,5). Dus is $K\Lambda HZ$ een parallelogram. Hierin is wegens Prop. 7, toegepast op niet-gelijkvormige segmenten,

$$(KM, MZ) = (\Lambda N, NH)$$

dus $MN \,//\, ZH$. Laat nu $K\Lambda$, MN, ZH den diameter $B\Delta$ opv.

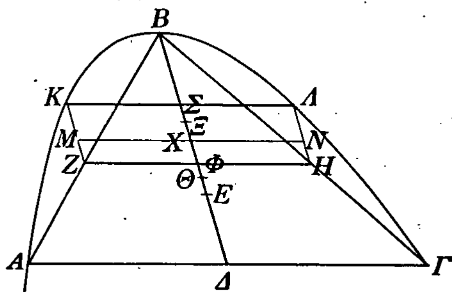


Fig. 147.

snijden in Σ, X, Φ. X is dan het centrum der zwaarte van de segmenten AB en ΓB samen. Zij verder E het zwaartecentrum van $\triangle AB\Gamma$.

Nu is

$$B\Delta = 4KZ.$$

Immers $B\Delta = 4B\Sigma$ (III; 2, 5) $= 2B\Phi$. Dus $B\Sigma = \Sigma\Phi = KZ = \frac{1}{4}B\Delta$.

Daar volgens Prop. 7

$$(B\Theta, \Theta\Delta) = (KM, MZ) \text{ is nu ook}$$
$$\Theta\Delta = 4MZ = 4X\Phi$$

en dus

$$B\Theta = 4\Sigma X.$$

(De puntdrietallen B, Θ, Δ en Σ, X, Φ zijn dus gelijkvormig met gelijkvormigheidsfactor 4).

Daar het segment $AB\Gamma$ bestaat uit den driehoek $AB\Gamma$ met zwaartecentrum E en het segmentenpaar AB, ΓB met centrum X, geldt voor het centrum Θ van $AB\Gamma$ de betrekking

$$(E\Theta, X\Theta) = (\text{segment } AB + \text{segment } \Gamma B, \triangle AB\Gamma). \qquad (1)$$

Nu is wegens de hoofdstelling van **Q. P.**

segment $AB +$ segment $\Gamma B = \frac{4}{3}\ (\triangle ABK + \triangle \Gamma B\Lambda) = \frac{1}{3} \triangle AB\Gamma$ dus

$$X\Theta = 3E\Theta.$$

Archimedes bepaalt nu een lijnstuk, dat gelijk is aan $E\Theta$.

Men heeft

$$B\Sigma + X\Theta = B\Theta - \Sigma X = 3\Sigma X$$

dus is

$$X\Theta = 3\Sigma X - B\Sigma.$$

Bepaal nu op ΣX een punt Ξ zoodat $B\Sigma = 3\Sigma\Xi$

dan is

$$X\Theta = 3\Sigma X - 3\Sigma\Xi = 3X\Xi$$

dus is

$$X\Xi = E\Theta$$

en dus

$$\Xi E = \Xi X + X\Theta + \Theta E = 5E\Theta.$$

Ook is

$$B\Xi = B\Sigma + \Sigma\Xi = \tfrac{4}{3} B\Sigma = \tfrac{1}{3} B\Delta = \Delta E$$

dus

$$\Delta E = \Xi E = 5\Theta E.$$

Hieruit volgt nu

$$\Delta\Theta = 6\,\Theta E, BE = 10\,\Theta E, B\Theta = 9\,\Theta E.$$

zoodat inderdaad

$$B\Theta = \tfrac{3}{2}\,\Theta\Delta.$$

De afleiding zou natuurlijk in algebraischen vorm veel eenvoudiger verloopen.

Is $B\Delta = a$ en $B\Theta = \lambda a$, dan is $KM = \frac{1}{4}\lambda a$

$BX = \frac{1}{4}a(1 + \lambda)$

dus

$$X\Theta = \lambda a - \tfrac{1}{4}a(1 + \lambda) \text{ en } E\Theta = a(\tfrac{2}{3} - \lambda).$$

De betrekking (1) levert nu voor λ de vergelijking

$$\frac{\frac{2}{3} - \lambda}{\lambda - \frac{1}{4}(1 + \lambda)} = \frac{1}{3}$$

waaruit volgt

$$\lambda = \tfrac{3}{5}.$$

De thans nog overblijvende twee proposities 9 en 10 zijn, zooals ze er staan, naar den vorm wel het meest ongenietbare, wat in de Grieksche wiskunde voorkomt. In Prop. 9 wordt een herleiding van een zekere, in Prop. 10 optredende uitdrukking als stelling

Prijs in slap linnen bandje f 1.50

ZO JUIST VERSCHEEN DE **VIERDE DRUK**,

HET 16e TOT 20e DUIZENDTAL,

VAN

NOORDHOFF'S SCHOOLTAFEL

UITGAVE P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

De eerste druk werd ingeleid als volgt:

Men kan niet zeggen, dat er geen goede Nederlandse tafels bestaan; immers we hebben de tafels van Van Pesch, Versluys en Gonggrijp. Deze zijn nl. volstrekt betrouwbaar, daar ze ook de nodige aanwijzingen bevatten ter behandeling van moeilijke intervallen. Tafels, waarin die ontbreken, zijn misleidend en dus onbruikbaar, omdat noch de leerling, noch de leraar het zonder de aanwijzingen kan stellen. Deze zijn nodig ter vermijding van foutieve interpolaties en het ontbreken er van is de reden, dat de leerlingen er onkundig van worden gelaten en dat het tot het merendeel nooit doordringt, dat ze niet in allen dele op hun tafel kunnen vertrouwen.

De bovengenoemde tafels, hoe uitnemend ook, ieder in haar bijzondere bewerking, hebben als schooltafel tegen, dat de interpolatie in de moeilijke intervallen, bijzondere zorg eist. Nu is daar m.i. niets tegen en de vele gebruikers beschouwen dit blijkbaar evenmin als een bezwaar; leraren, die een van bovengenoemde tafels gebruiken, zou ik dus willen raden: „blijf er bij". — Er zijn er echter ook, die een tafel wensen, waarbij deze moeilijkheid zich niet voordoet en die nochtans zuivere geïnterpoleerde waarden wensen; bovendien een tafel van de goniometrische functies om de minuut. Om aan hun wensen tegemoet te komen, is deze tafel samengesteld. Op de volgende wijze zijn de moeilijkheden opgelost.

Het interval tot 20′ van log sin en log tg wordt om de seconde gegeven en wel in één tafel; dit is mogelijk, omdat ze hoogstens een eenheid van de vijfde decimaal verschillen; van interpolatie dus geen sprake. Verder van 20′ tot 2° om de 10 seconden, waardoor gewaarborgd wordt, dat de evenredige delen juiste uitkomsten

geven. Tafel III, de sinustafel, in tegenstelling met tafel II, de logarithmen sinustafel, geeft de waarden van de goniometrische functies om de minuut met aanwijzing, in hoeverre geïnterpoleerde waarden van de cotangens nog betrouwbaar zijn.

De inrichting van tafel II verschilt iets van de gewone; als toch de getallen van lange kolommen beginnen met hetzelfde drietal cijfers, doet men beter, die maar weg te laten; daardoor heeft men beter zicht op de getallen. Het vlugge zoeken en terugzoeken wordt mede bevorderd, doordat men in Tafel II op twee naast elkaar liggende bladzijden twee volle graden overziet, in Tafel III zelfs vier.

Mochten er nog wensen zijn voor deze tafel, die niet reeds vervuld zijn door Gonggrijp's Tafel D of Versluys' Tafel H, dan zal men mij zeer verplichten mij daarvan in kennis te stellen. Tevens verzoek ik gebruikers mij te wijzen op mogelijke drukfouten.

Amsterdam Zuid P. WIJDENES.
Jac. Obrechtstraat 88.

UIT HET VOORBERICHT BIJ DE TWEEDE DRUK.

Tevreden gebruikers hebben mij nog het volgende meegedeeld om bij voorkomende gelegenheid van gebruik te maken; deze doet zich thans reeds voor.

1) Ook de tafel van de gewone logarithmen is heel handig, daar men op twee bladzijden naast elkaar een vol honderdtal overziet.

2) De logarithmen-sinustafel heeft alle secondentafeltjes rechts; op elke bladzijde staat een volle graad, dus van 5° af op twee naast elkaar staande bladzijden twee volle graden.

3) Toe te juichen is het opnemen van de sinustafel; (men vindt deze echter ook reeds in Gonggrijp's tafel D, in Versluys' tafel H en thans ook in de tafel van Van Pesch). Een tafel met opklimming om de minuut is nodig, om de 15 minuten is volstrekt doelloos; immers het nut gaat weer verloren wegens tijdrovende interpolaties, waarvan bovendien niet is aangegeven, in hoeverre die juist zijn.

Van deze gelegenheid maak ik tevens gebruik om mijn zienswijze te geven over de rentetafels en om een paar vragen te beantwoorden.

a) „Waarom zo'n drukte gemaakt van de kleine hoeken? Ze komen haast niet voor", merkt men op. Mijn antwoord daarop is: inderdaad, als de H.B.S. en het Gymnasium ze vermijdt, komen ze daar niet voor en op vele scholen moesten de leraren de kleine hoeken wel vermijden, omdat hun tafel hen in de steek laat, waar het er juist op aankomt. Beperkt men zich tot driehoeken en vierhoeken, dan ontgaat men de kleine hoeken gemakkelijk; maar de practijk zal ze dikwijls eisen b.v. bij wegenbouw. Nu weet ik wel, dat de middelbare school zich niet met allerlei toepassingen al van te voren kan bezighouden, maar ik vind toch, dat men op voldoende belangstelling zal kunnen rekenen, als men b.v. opgeeft: „De afstand van de aarde tot de maan is 384395 km; de middellijn van de maan is 3472,8 km; onder welke hoek wordt de maan door ons gezien?" of: „Bereken de kimduiking, die een vliegenier kan waarnemen op 3000 m hoogte; de straal van de aarde te rekenen op 6378,4 km". Bij beide komen „kleine hoeken" voor. De lezer zal ze met meerdere kunnen aanvullen. Of men nu zulke vraagstukjes maakt of niet, doet er niet toe, dat moet ieder voor zich zelf weten, maar dat men het bestaan van enige zwarigheid in de logarithmentafel voor het interval tot 2° en boven 88° verzwijgt, lijkt me toch minder goed.

De tafels van Van Pesch, Versluys en Gonggrijp besteden natuurlijk behoorlijke zorg aan de genoemde intervallen, ook de Schooltafel, deze op een geheel andere manier; deze alle vier voldoen aan alle eisen, die de school kan stellen.

b) Men heeft mij gevraagd om interpolatietafels in de sinustafel; het aantal verschillen is door de sterke afwijking van de cotangens echter zo groot, dat deze zeker drie vel druks zouden moeten beslaan. Bovendien zouden alle bijzondere manieren om in 5 decimalen nauwkeurig te kunnen interpoleren ook moeten worden opgenomen. Volledig en afdoende is daarin echter reeds voorzien door Versluys Grote tafel H.

In de „sinustafel" kan men tussen de minuten overal evenredig interpoleren, behalve in de cotangenten tot 9°30′, in de tangenten van 80°30′ tot 90°.

P. W.

LOGARITHMEN- EN RENTETAFELS.

Voor scholen, waar men geen goniometrie leert, maar wel sam. intrest.

P. WIJDENES, **Log.- en Rentetafel A, 6e druk,** gec. . . f 0.60.
Deze bevat: Aanwijzingen. Gewone log. Log. van constanten. Log. van rentefactoren. Rentetafels **I** $(1+i)^n$; **II** $(1+i)^{-n}$ voor de procenten 2, 2½, 3, 3½, 4, 4½, 5, 5½ en 6. Machten, wortels en omgekeerden.

P. WIJDENES, **Log.- en Rentetafel B, 11e druk,** gec. . f 0.75.
Inhoud als A en bovendien Rentetafel **III** $\Sigma\ (1+i)^n$; **IV** $\Sigma\ (1+i)^{-n}$; **V** Annuïteitentafel.

P. WIJDENES, **Log. tafel C, 2e druk** . . . . f 0.40.
Inhoud als A, maar zonder rentetafels en aanwijzingen.

Voor Wisk. L.O.; H.B.S.; Gymn.

P. WIJDENES, **Rentetafel D, 2e druk** . . . . f 0.50.
Deze bevat de rentetafels I, II, III, IV en V onder A en B hierboven genoemd, met **50** termijnen.

Voor examens in Handelsrekenen, H. Handelsscholen, banken, kantoren, accountants.

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET, **Log.- en Rentetafel E, 2e druk,** gec. met hulpboekje . . . . . . f 3.25.
Deze bevat de gewone log. en de vijf tafels voor samengestelde interest, verder de vijf overeenkomstige voor samengesteld disconto in 100 termijnen en procenten van ½ tot 8 met ½ % opklimmende.

Tafel G. Logarithmen- en rentetafels, in slap linnen . . f 1.60
Tafel G is de **schooluitgave van tafel E,** nl. zonder de discontotafels.

H.B.S. 5-j. c., Gymn., Kl. Delft Landmeter, Wiskunde L.O.; Studenten.

J. VERSLUYS, **Grote tafel H,** in drie kleuren, 298 blz. **3de druk,** gebonden . . . . f 2.90
Wit I. Gewone logarithmen blz. 1-32. — Rose II. De log. der gon. functies blz. 1-96. — Wit III. De gon. functies met interpolatietafels blz. 1-128. — Groen IV. Bijtafels blz. 130-170.

A. Natuurlijke logarithmen.
B. Omzetting van natuurlijke logarithmen in gewone.
C. Gon. verh. van hoeken in radialen uitgedrukt.
D. Exponentiële en hyperbolische functies.
E. Factorentafel en tafel der priemgetallen.
F. Machten, wortels en omgekeerden.
G. Enige constanten met hun logarithmen.

☛ Wilt gij weten, welke tafel voor U of voor Uw school geschikt is, vraag dan inlichtingen aan P. WIJDENES, Jacob Obrechtstraat 88, Amsterdam Zuid, Tel. 27119.

P. NOORDHOFF N.V. TE GRONINGEN EN BATAVIA.
Ook verkrijgbaar bij de boekhandel.

geformuleerd en synthetisch bewezen, zonder dat men nog eenig inzicht heeft in de motieven, om juist deze gecompliceerde kwestie te behandelen. Men leert die motieven pas kennen, wanneer het eveneens volkomen synthetische betoog van Prop. 10 tot die uitdrukking blijkt te voeren. Daarbij komt nog, dat er in den loop van het bewijs een omweg wordt gemaakt, die te vermijden zou zijn geweest.

We zullen in het volgende de beide proposities samenvatten in een enkele analytisch gevoerde redeneering (fig. 148).

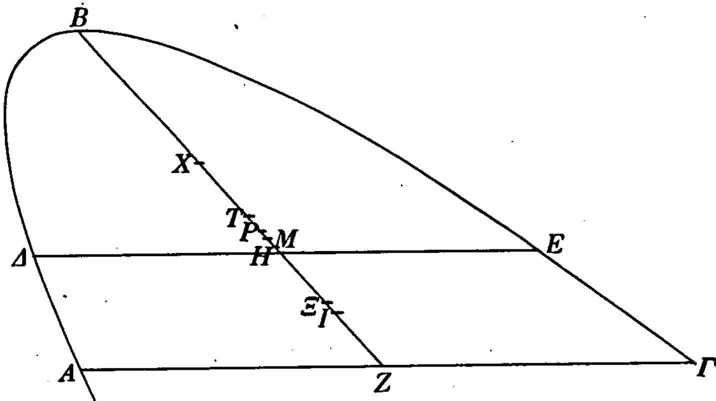


Fig. 148.

Het doel is, de ligging van het zwaartecentrum te bepalen van de figuur, die van een segment eener orthotome aan de zijde van de basis door een koorde parallel met de basis wordt afgesneden, dus van de schijf $A\Delta E\Gamma$, die we door Σ zullen weergeven. Denk de zwaartecentra X en P van de segmenten ΔBE en $AB\Gamma$ bepaald, dan gelden dus wegens Prop. 8 de betrekkingen

$$XH = \tfrac{2}{5}\,BH \text{ en } PZ = \tfrac{2}{5}\,BZ$$

waarin H en Z opv. de middens zijn van ΔE en $A\Gamma$.

Is nu I het zwaartecentrum van Σ, dan moet I dus voldoen aan

$$(XP, PI) = (\Sigma, \text{ segment } \Delta BE). \qquad (1)$$

Nu is

$$\text{segment } AB\Gamma = \tfrac{4}{3} \triangle AB\Gamma$$
$$\text{segment } \Delta BE = \tfrac{4}{3} \triangle \Delta BE$$

waaruit volgt

$$(\text{segment } AB\Gamma, \text{ segment } \Delta BE) = [\mathrm{O}(A\Gamma, BZ),\ \mathrm{O}(\Delta E, BH)] =$$
$$= \mathbf{T\Delta}\ (AZ, \Delta H)$$

omdat

$$(BZ, BH) = [\mathbf{T}(AZ), \mathbf{T}(\Delta H)].$$

De methodiek der oppervlakterekening eischt nu, dat we de tripelreden van AZ en ΔH door de reden van twee lijnstukken voorstellen. Denk hiertoe geconstrueerd de punten Ξ en T, zoodat

$$BZ, B\Xi, BH, BT$$

een rij van gedurig evenredige lijnstukken (meetkundige reeks) vormen.

Men heeft nu

$$(BZ, BH) = \Delta\Lambda\ (BZ, B\Xi)$$

dus

$$(AZ, \Delta H) = (BZ, B\Xi)$$

$$(BZ, BT) = T\Lambda\ (BZ, B\Xi) = T\Lambda\ (AZ, \Delta H).$$

Dus is

$$(BZ, BT) = (\text{segment } AB\Gamma, \text{ segment } \Delta BE)$$

en dus

$$(TZ, BT) = (\Sigma, \text{ segment } \Delta BE).$$

Ter bepaling van I hebben we dus in verband met (1) de betrekking

$$(XP, PI) = (TZ, BT) \qquad (2)$$

Om de ligging van I ten opzichte van de rechte begrenzingslijnen van Σ te kennen, moet de verhouding (IZ, HZ) worden bepaald.

Nu is $IZ = PZ - PI$, waarin $PZ = \frac{2}{5}\ BZ$.

Beschouw nu een lijnstuk BM, zoodat $PI = \frac{2}{5}\ BM$, dan is $IZ = \frac{2}{5}\ MZ$.

Uit (2) volgt

$$(PI, BT) = (XP, TZ)$$

waarin

$$XP = BP - BX = \tfrac{3}{5}\ HZ$$

dus

$$(PI, BT) = (\tfrac{3}{5}\ HZ, TZ) \qquad (3)$$

Daar nu

$$BT, BH, B\Xi, BZ$$

een meetkundige reeks vormen, zullen de verschillen van opvolgende termen

$$TH, H\Xi, \Xi Z$$

dit ook doen en wel met dezelfde reden.

De nu volgende herleiding berust voornamelijk op een eigenschap van een meetkundige reeks en haar verschilreeks, die algemeen als volgt te formuleeren is:

Is de meetkundige reeks

$$t_1, t_2, \ldots\ldots t_n$$

de verschilreeks

$$v_1, v_2, \ldots\ldots v_{n-1}$$

dan is

$$\frac{\lambda_1 v_1 + \ldots . \lambda_{n-1} v_{n-1}}{\mu_1 v_1 + \ldots . \mu_{n-1} v_{n-1}} = \frac{\lambda_1 t_1 + \ldots . \lambda_{n-1} t_{n-1}}{\mu_1 t_1 + \ldots . \mu_{n-1} t_{n-1}} = \frac{\lambda_1 t_2 + \ldots . \lambda_{n-1} t_n}{\mu_1 t_2 + \ldots . \mu_{n-1} t_n} \quad (A)$$

waarin $\lambda_1 \ldots . \lambda_{n-1}$, $\mu_1 \ldots . \mu_{n-1}$ willekeurige constanten zijn.

Op grond hiervan blijkt nu

$$(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1\ ;\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1)$$

$$(HZ,\ TZ) = (B\Xi + BZ,\ BH + B\Xi + BZ)$$

zoodat (3) te schrijven is als

$$(PI,\ BT) = [\tfrac{3}{5}(B\Xi + BZ),\ BH + B\Xi + BZ]$$

en wegens $PI = \frac{2}{5} BM$

$$(BM,\ BT) = [3\,(B\Xi + BZ),\ 2\,(BH + B\Xi + BZ)] \qquad (4)$$

Stellen we hierin ter verduidelijking even

$$BZ = 1,\ B\Xi = r,\ BH = r^2$$

dan staat er

$$\frac{BM}{BT} = \frac{3\,(1 + r)}{2\,(1 + r + r^2)}$$

terwijl Archimedes een betrekking gebruikt, die in dezelfde algebraische symboliek in het tweede lid de verhouding

$$\frac{3 + 6r + 3r^2}{2\,(1 + r^3) + 4\,(r + r^2)}$$

heeft. Echter is deze breuk te schrijven als

$$\frac{3(1 + r)^2}{2(1 + r)\,(1 + r + r^2)} = \frac{3(1 + r)}{2(1 + r + r^2)}$$

Doordat Archimedes deze vereenvouding niet uitvoert, wordt zijn berekening te ingewikkeld. Denken we haar wel aangebracht, dan vinden we, de in Prop. 9 gegeven synthese in omgekeerde richting doorloopend, uit (4):

$$(TM,\ BT) = [B\Xi - BH + BZ - BH,\ 2(BH + B\Xi + BZ)] =$$
$$[H\Xi + HZ,\ 2(BH + B\Xi + BZ)]$$

Verder is op grond van (A)

$$(BT,\ TH) = (BH,\ H\Xi) = (BH + B\Xi,\ HZ) = (2BH + B\Xi,\ H\Xi + HZ)$$

dus *ex aequali*

$$(TM,\ TH) = [2BH + B\Xi,\ 2(BH + B\Xi + BZ)]$$

Hieruit volgt

$$(HM,\ TH) = [B\Xi + 2BZ,\ 2(BH + B\Xi + BZ)]$$

of wegens (A)

$$(HM,\ TH) = [BH + 2B\Xi,\ 2(BT + BH + B\Xi)]$$
$$= (BH + 3B\Xi + 2BZ,\ 2BT + 4BH + 4B\Xi + 2BZ)$$

Ook is wegens (A)

$$(TH,\ HZ) = (BH,\ B\Xi + BZ) = (BT,\ BH + B\Xi) =$$
$$(2BH + BT,\ BH + 3B\Xi + 2BZ)$$

dus *ex aequali*

$$(HM,\ HZ) = (2BH + BT,\ 2BT + 4BH + 4B\Xi + 2BZ)$$

dus

$$(MZ, HZ) = (3BT + 6BH + 4B\Xi + 2BZ, 2BT + 4BH + 4B\Xi + 2BZ)$$

dus wegens $IZ = \frac{2}{5} MZ$

$$(IZ,\ HZ) = (3BT + 6BH + 4B\Xi + 2BZ,\ 5BT + 10BH + 10B\Xi + 5BZ)$$

wat in Prop. 10 (in woorden) wordt uitgesproken en bewezen met behulp van de in Prop. 9 gegeven herleiding van de uitdrukking voor $(BM,\ BT)$ die we tot (4) vereenvoudigd hebben. De lectuur van het oorspronkelijke wordt hierbij nog bemoeilijkt, doordat in Prop. 9 heel andere letters worden gebruikt dan in Prop. 10, waarin het verkregen resultaat wordt toegepast.

We geven ten slotte nog het resultaat in algebraische symboliek weer.

Is $BZ = a$, $BH = b$, dan is

$$\frac{IZ}{a - b} = \frac{3b\sqrt{b} + 6b\sqrt{a} + 4a\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{5b\sqrt{b} + 10b\sqrt{a} + 10a\sqrt{b} + 5a\sqrt{a}}$$

HOOFDSTUK XIII.

DE ZANDREKENAAR.

1. Het werk *De Zandrekenaar,* hoewel door den schrijver bedoeld als bijdrage tot de Grieksche arithmetica, ontleent zijn historische beteekenis niet alleen aan wat het uit hoofde van zijn bestemming bevat; niet minder groot is de waarde, die het bezit als document voor de astronomische werkzaamheid van Archimedes. Dat hij zich met astronomie zou hebben bezig gehouden, was natuurlijk te verwachten, al heeft hij geen werk nagelaten, dat uitsluitend daaraan is gewijd: astronomie en wiskunde werden in zijn tijd nauwelijks als twee verschillende wetenschappen onderscheiden; zijn vader Pheidias had het vak al beoefend en zijn vriend Konoon had er zelfs een grooten naam in verworven. Zelf bezat hij dien in de oudheid ook. *Unicus spectator caeli siderumque* heet hij bij Livius [1]) en verschillende andere schrijvers citeeren zijn waarnemingen en theorieën. Zoo vermeldt Hipparchos (wiens uitlatingen ter zake door Ptolemaios bewaard zijn [2]) zijn bepaling van de lengte van het jaar; naar aanleiding van hetzelfde probleem wordt hij aangehaald door Ammianus Marcellinus [3]), terwijl Macrobius over zijn theorie betreffende de onderlinge afstanden van zon, maan en planeten en hun ligging ten opzichte van de spheer der vaste sterren bericht [4]). Van zijn practische bedrevenheid op het gebied

---

[1]) Titus Livius, *Ab urbe condita* XXIV, 34.

[2]) De mededeeling van Hipparchos kwam voor in zijn werk *Περὶ τῆς μεταπτώσεως τῶν τροπικῶν καὶ ἰσημερινῶν σημείων*; geciteerd door Ptolemaios, *Syntaxis Mathematica* III, 1. ed. J. L. Heiberg (Leipzig 1898) I, 195.

[3]) Ammianus Marcellinus (Latijnsch historicus der 4e eeuw) noemt hem uitmuntend onder de *periti mundani motus et siderum. Ammiani Marcellini rerum gestarum libri qui supersunt.* XXVI; 1, 8. ed. E. U. Clark, II (Berlijn 1915), 391.

[4]) Macrobius is een Latijnsch schrijver van Afrikaansche afkomst in het begin der 5e eeuw. *Ambrosii Theodosii Macrobii Commentarius in Somnium Scipionis* II; 3, 13. ed. F. Eyssenhardt (Leipzig 1868), 584.

der astronomie getuigt, behalve de constructie van het planetarium, een opmerkelijke bepaling van den schijnbaren diameter van de zon, die we in het thans te behandelen werk zullen leeren kennen.

2. Als inleiding moge hier eerst worden uiteengezet, hoe een in den grond van de zaak zuiver arithmetisch probleem aanleiding kon geven tot een werk, waarin zoowel theoretische beschouwingen als practische waarnemingen op astronomisch gebied voorkomen.

Het gestelde probleem is de voor de Grieksche wiskunde principieel belangrijke tweeledige kwestie van het benoemen en schrijven van groote getallen, een vraag dus, die deels op taalkundig gebied ligt, deels op dat der mathematische symboliek. Taalkundig bestond de moeilijkheid hierin, dat voor de opvolgende machten van het grondtal van het getallenstelsel slechts drie namen in gebruik waren (ἑκατόν = honderd; χίλιοι = duizend; μύριοι = tienduizend). Voor getallen boven 10^4 moest nu steeds in de eerste plaats het aantal myriaden (tienduizenden) worden opgegeven, dat zij bevatten en dat leverde reeds voor getallen boven 10^8 aanzienlijke bezwaren op. Voor het wiskundig teekenschrift was het probleem niet minder ernstig. In het gebruikelijke alphabetische cijfersysteem konden getallen tot 10^4 met de kleine letters van het alphabet (voor de duizendtallen van accenten voorzien) worden weergegeven. Voor 10^4 was het symbool M of $\overset{Y}{M}$ in gebruik, maar daarboven bestond weer de noodzaak, het aantal malen, dat M in het weer te geven getal voorkwam, met behulp van de overige teekens aan te duiden, wat tot zeer gecompliceerde uitdrukkingen aanleiding gaf.

Archimedes wil nu een zoo afdoende oplossing van dit probleem voorstellen, dat ook de grootste getallen, die ooit in de natuurwetenschap zullen optreden, vatbaar zullen zijn voor een korte uitdrukkingswijze. Hij kiest, om de kracht van zijn systeem te demonstreeren, een voorbeeld van astronomische dimensies: het aantal zandkorrels te bepalen, dat binnen de spheer der vaste sterren plaats zou kunnen vinden. Daar dit aantal onmiddellijk afhangt van de afmetingen, die in het heelal voorkomen, moet hij beginnen met beschouwingen over astronomische afstanden.

3. We geven de inleidende woorden van het werk in letterlijke vertaling weer:

Er zijn menschen, koning Geloon[5]*), die meenen, dat het aantal zandkorrels oneindig groot is. Ik bedoel niet alleen van het zand, dat in Syracuse en het overige Sicilie aanwezig is, maar ook van dat op de geheele wereld, bewoond en onbewoond, voorkomt. Anderen nemen weliswaar niet aan, dat het oneindig is, maar zij meenen, dat er niet een zoo groot benoemd getal bestaat, dat het de grootte ervan overtreft. Het is duidelijk, dat wanneer zij, die zoo oordeelen, zich eens een zoo groot uit zand bestaand volume voorstelden, als het volume der aarde zou zijn, indien daarin alle zeeën en holten waren opgevuld tot aan een hoogte gelijk aan de hoogste bergen, zij nog veel minder zullen meenen, dat er een getal zou kunnen worden genoemd, dat het aantal korrels daarvan overtreft. Ik zal echter trachten met behulp van geometrische bewijzen, die gij zult kunnen volgen, aan te toonen, dat er onder de door ons benoemde getallen, die gepubliceerd zijn in het geschrift voor Zeuxippos, voorkomen, die niet alleen het aantal korrels van het zand, dat, zooals gezegd, een volume heeft gelijk aan dat der opgevulde aarde, overtreffen, maar ook van het zand, dat een inhoud heeft gelijk aan den kosmos. Ge weet, dat kosmos door de meeste astrologen de bol genoemd wordt, welks centrum het centrum der aarde is en welks straal gelijk is aan den afstand tusschen het centrum der zon en het centrum der aarde . . . . Aristarchos van Samos heeft echter zekere hypothesen uitgesproken, waarin uit de onderstellingen volgt, dat de kosmos veel grooter is dan de juist genoemde. Hij onderstelt namelijk*[6]*), dat de vaste sterren en de zon onbewegelijk zijn, maar dat de aarde zich over een cirkelomtrek beweegt om de zon, die in het midden der beweging gelegen is, en dat de spheer der vaste sterren, die om hetzelfde centrum ligt als de zon, zoo groot is, dat de cirkel, waarover de aarde ondersteld wordt, zich te bewegen, dezelfde reden heeft tot den afstand der vaste sterren als het centrum van een bol tot de oppervlakte. Nu is het duidelijk, dat dit onmogelijk*

---

[5]) Geloon was de zoon en mederegent van koning Hieroon II.

[6]) We hebben hier de oudste en tevens meest gezaghebbende bewijsplaats voor het bestaan van een heliocentrisch stelsel in de oudheid. De opsteller, Aristarchus van Samos, leefde in het begin van de 3e eeuw v. Chr., dus na Euclides en voor Archimedes. Van het werk, waarin hij zijn systeem uiteen heeft gezet, is niets over. Alleen bewaard gebleven is een geschrift over de grootten van zon en maan, met Engelsche vertaling uitgegeven door T. L. Heath, *Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus* (Oxford 1913).

is. Daar namelijk het centrum van een bol geen grootte heeft, kan men ook niet aannemen, dat het een reden heeft tot de oppervlakte van den bol. Het is echter waarschijnlijk, dat Aristarchos het volgende bedoeld heeft: daar wij onderstellen, dat de aarde als het ware het middelpunt van den kosmos is, neemt hij aan, dat de reden, die de aarde heeft tot wat wij den kosmos noemen, dezelfde is, als die de bol, waarop de cirkel ligt, waarover de aarde gedacht wordt zich te bewegen, tot de spheer der vaste sterren heeft[7]*. Want zijn bewijzen der verschijnselen passen bij deze onderstelling en in het bijzonder schijnt hij de grootte van den bol, waarover hij de aarde laat bewegen, gelijk te stellen aan wat wij den kosmos noemen. Wij beweren nu, dat, indien er uit zand een bol werd gevormd van zoodanige grootte, als Aristarchos de spheer der vaste sterren denkt te zijn, er dan toch onder de getallen, die in de Beginselen*[8] *benoemd zijn, voorkomen, die het aantal korrels van het zand, dat een volume heeft, gelijk aan den genoemden bol, overtreffen; waarbij we het volgende onderstellen:*

I. *dat de omtrek van de aarde driehonderd myriaden stadia bedraagt en niet meer*[9] . . . .

---

[7]) Waarschijnlijker is, dat Aristarchos heeft willen uitdrukken, dat de aardbaan ten opzichte van de spheer van de vaste sterren „als een punt" is. Zoo spreekt hij namelijk ook over de aarde ten opzichte van de maanspheer *(Aristarchi Samii liber de magnitudinibus et distantiis solis et lunae*; ed. Wallis, Oxford 1688; ook Opera Mathematica (Oxford 1693—1699) III, 565—594.

Positio 2.: *τὴν γῆν σημείου τε καὶ κέντρου λόγον ἔχειν πρὸς τῆς σελήνης σφαῖραν.*

Op dezelfde wijze drukt zich Ptolemaios uit, als hij de aarde vergelijkt met de zonnespheer (*Syntaxis Mathematica* I, 6; ed. J. L. Heiberg (Leipzig 1898) I, 20.

[8]) Deze vertaling is onzeker. In de editie van Heiberg staat *τῶν ἐν ἀρχᾷ ἀριθμῶν τῶν κατονομαξίαν ἐχόντων* wat hij vertaalt door *numerorum denominatorum, quos supra significavimus* (*Opera* II, 221; 1. 5). Varia lectio is echter *τῶν ἐν 'Αρχαῖς κ.τ.λ* dus „*in de Beginselen*". Hierin zou dus *Beginselen* de titel van het werk zijn, dat aan Zeuxippos was gezonden.

[9]) Archimedes merkt hierbij op, dat iemand (waarschijnlijk Dikaiarchos van Messina, geograaf uit de 2e helft der 4e eeuw) getracht heeft te bewijzen, dat de omtrek 30 myriaden ($3 \cdot 10^5$) stadia bedraagt, maar dat hij maximaal de tien maal zoo groote waarde van 300 myriaden stadia (3.10^6) aanneemt. Hierin is 1 stadium $=$ 190 m; de werkelijke waarde van den omtrek is ca. 2.10^5 stadia).

Andere door de Grieken aangenomen waarden zijn: Aristoteles: 4.10^5 stadia; Eratosthenes, Hipparchos, Straboon: $2,5.10^5$ stadia;